UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física.

“Enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos”

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física.

Autores:

Tamia Pacari Contento Chalán

C.I: 1105348005

Correo: amykontnto@gmail.com

Oscar Fabián Nivelo Muicela

C.I: 0105524714

Correo: otomui1408@cbfdcyg jymmgmail.com

Director:

Dr. Alberto Santiago Avecillas Jara

CI: 1704208816

Cuenca – Ecuador

22/01/2020

RESUMEN

Este trabajo de titulación presenta un estudio sobre las dificultades que tienen los estudiantes al momento de analizar y resolver problemas sobre sistemas dinámicos en la asignatura de Mecánica Analítica. Para ello se ha optado por un enfoque cualitativo, las técnicas usadas para obtener información fueron: grupos focales y entrevistas realizadas a estudiantes y docentes respectivamente. Los resultados demuestran que las dificultades por una parte aparecen en el instante de interpretar diagramas o imágenes comúnmente usados en los libros de texto, para representar sistemas dinámicos tridimensionales, y por otra parte la carencia de conocimientos previos tanto de Matemáticas como de Física. Esto incentivó la elaboración de una propuesta mediante la construcción de recursos didácticos, especialmente material concreto, los cuales cuentan con su respectiva guía docente distribuida en diez clases, donde se sugieren varias actividades para abordar los diversos temas, que a su vez se fundamentan en las teorías constructivistas: "Aprendizaje significativo" de Ausubel y "Teoría sociocultural" de Vygotsky. Además, los recursos propuestos cumplen una función motivadora, para el docente al momento de explicar la parte teórica o cuando los estudiantes lo utilizan para analizar y resolver problemas sobre sistemas dinámicos, de tal manera que permitan mejorar la comprensión y visualización de dichos fenómenos.

Palabras Claves: Mecánica Analítica. Constructivismo. Recursos didácticos. Guía didáctica.

ABSTRACT

This graduation project presents a study regarding the difficulties that students face at the moment of analyzing and solving problems about dynamical systems in the subject of Analytical Mechanics. Thus, a qualitative approach has been chosen. The techniques used to gather information were: focus groups and interviews applied to students and teachers, respectively. The results indicate that the difficulties, in one hand, appear at the moment of interpreting diagrams or images that are commonly used in textbooks in order to represent tridimensional dynamical systems and, in other hand, the lack of previous knowledge in both Mathematics and Physics. It motivates to the creation of a proposal through the construction of didactical resources, especially specific material which have their own teaching guide distributed in ten classes where multiple activities are suggested to address diverse topics that in turn are based in constructivist theories: “Meaningful Learning” by Ausubel and “Sociocultural Theory” by Vygotsky. Moreover, the proposed resources accomplish their motivating function; for the teacher at the moment of explaining the theorical part or when the students used them in order to analyze and solve problems about dynamical systems in a way that allows ameliorating the comprehension and the overview of these phenomena.

Key Words: Analytical Mechanics. Constructivism. Didactical Resources. Didactical Guide.

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 12
CAPÍTULO I 14
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA 14
1.1 Problemática. 14
1.2 Enfoque Constructivista. 15
1.2.1 Teoría sociocultural de Lev Vygotski 17
1.2.2 Aprendizaje Significativo de David Ausubel 18
1.3 Estrategias de enseñanza-aprendizaje 19
1.3.1 Lluvia de ideas 20
1.3.2 Trabajo colaborativo 21
1.4 Recursos didácticos 21
1.4.1 Recursos tecnológicos. 22
1.4.2 Importancia del material didáctico en el estudio de la Física. 23
1.5 Guía didáctica en el proceso educativo. 24
CAPÍTULO II 25
METODOLOGÍA Y RESULTADOS 25
2.1 Metodología 25
2.2 Selección de la muestra 25
2.3 Aplicación de los Grupos focales 25
2.3.1 Análisis de resultados “Grupos focales realizado a estudiantes” 26
2.4 Aplicación de entrevistas 34
2.4.1 Análisis de resultados “Entrevistas a docentes” 34
2.5 Conclusión 39
CAPÍTULO III 40
PROPUESTA 40
3.1 Estructuración de la propuesta 40
3.2 Validación de recursos 118
CONCLUSIONES 120
RECOMENDACIONES 121
REFERENCIAS 122
ANEXOS 124

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Tamia Pacari Contento Chalán en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 22 de enero 2020

Tamia Pacari Contento Chalán

C.I: 1105348005

Cláusula de Propiedad Intelectual

Tamia Pacari Contento Chalán, autora del trabajo de titulación "Enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 22 de enero de 2020

Tamia Pacari Contento Chalán

C.I: 1105348005

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Oscar Fabián Nivelo Muicela en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 22 de enero de 2020

Oscar Fabián Nivelo Muicela

C.I: 0105524714

Cláusula de Propiedad Intelectual

Oscar Fabián Nivelo Muicela, autor del trabajo de titulación "Enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 22 enero de 2020

Oscar Fabián Nivelo Muicela

C.I: 0105524714

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darnos la vida y permitirnos crecer en el ámbito personal y profesional, por todas las bendiciones recibidas durante nuestra formación académica.

A nuestros padres por todo el esfuerzo, tiempo y dedicación brindados hacia nosotros, por sus palabras de motivación para que cumplamos todos nuestros propósitos.

A los docentes de la Carrera de Matemática y Física, por impartir sus conocimientos, por compartir sus experiencias, su sabiduría, donde supieron guiarnos y prepararnos de la mejor manera como profesionales para desenvolvernos en el ámbito laboral.

Agradecemos al Dr. ASAJ por su entrega, dedicación y orientación durante el proceso de formación académica y de manera muy especial en la elaboración de este trabajo de titulación.

A nuestros compañeros de cursos, por su amistad y apoyo durante nuestros estudios universitarios.

Finalmente, agradecemos a todas las personas que nos dieron su apoyo y que gracias a eso llegamos a cumplir un sueño anhelado.

Oscar y Tamy

DEDICATORIA

A mis padres María Francisca y Luis Alberto, que con sus consejos, comprensión, amor y palabras de aliento siempre me motivaron para seguir adelante, inculcando valores y principios necesarios para lograr cumplir mis metas y sueños anhelados.

A mis hermanos Kuri, Charik y Luis, a mis primas, tías y tíos por todo el apoyo y cariño brindado.

A mi hijo y a Ti que llegaron a mi vida a llenar de luz y mucha alegría cuando menos lo esperaba, pero cuando más lo necesitaba, por cada palabra de aliento hacia mí para no rendirme y llegar a cumplir mi meta.

Me es grato agradecerles y a su vez dedicar este trabajo a cada uno de ustedes, porque gracias a su apoyo he logrado cumplir uno de mis sueños.

Dios los bendiga.

Tamy

DEDICATORIA

Este trabajo de titulación dedico primeramente a DIOS por haberme guiado en este camino maravilloso, dándome salud y vida.

A mis padres: Celso y María, por haberme apoyado en todo momento, tanto moral como económicamente. Sus enseñanzas, su amor, su paciencia, su empeño, sus consejos… han sido fundamentales para que pueda superar obstáculos y desenvolverme de la mejor manera en ámbito académico y la vida cotidiana.

De manera muy especial quiero dedicar este trabajo a mi hermano Marcelo, que ha sido como mi segundo padre, por apoyarme en todo momento, sus palabras de motivación han sido muy importantes para que pueda salir adelante.

A todos mis hermanos y hermana Gaby.

A todos mis seres queridos y amigos.

Oscar.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la Mecánica Analítica ha sido un gran reto tanto para estudiantes como docentes universitarios debido a ciertos factores como: la dificultad en la comprensión y visualización de los fenómenos dinámicos, los variados conceptos tanto de Matemáticas como de Física y los desarrollos teóricos. Es por eso que el presente trabajo de titulación se ha realizado con la finalidad de proponer la enseñanza de la Mecánica Analítica con el apoyo de recursos didácticos para los estudiantes de la Universidad de Cuenca.

En el primer capítulo se encuentra la fundamentación teórica que sirvió de base para elaborar la propuesta. En este capítulo se abordan temas tales como: las dificultades de comprensión que presentan los estudiantes al analizar problemas de Física; el enfoque constructivista del cual se ha tomado la Teoría sociocultural y el Aprendizaje significativo, dichas teorías explican que el estudiante puede aprender por una parte de forma individual cuando relaciona los esquemas mentales que posee con la nueva información y por otro lado mediante el aprendizaje colaborativo; finalmente se hace referencia a los conceptos de recursos didácticos y tecnológicos, su importancia y la guía didáctica.

En el segundo capítulo se muestran dos técnicas de investigación de tipo cualitativa: grupos focales y entrevistas aplicadas a estudiantes y docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, cuya finalidad fue obtener información sobre las experiencias, las estrategias de aprendizaje, los recursos didácticos, las dificultades que hayan surgido durante el desarrollo de la asignatura, entre otros. La información obtenida fue analizada con la herramienta ATLAS ti, la cual permitió seleccionar, categorizar y codificar la información, además de establecer relaciones entre dichas categorías. Los resultados confirman que existe un problema de visualización espacial, es decir, interpretar sistemas dinámicos que se trasladan o rotan en el espacio, así como también la falta de conocimientos previos, tanto de Matemáticas como de Física.

En el tercer capítulo se desarrolla la propuesta didáctica, la cual consiste en una guía docente con diez clases sobre temas de Mecánica Analítica, cada clase se encuentra estructurada con los tres momentos: anticipación, construcción y consolidación del conocimiento, donde se propone el desarrollo de las actividades mediante el uso de: material concreto (maquetas), recursos tecnológicos, demostraciones, notas, preguntas, etc.

Finalmente las limitaciones que surgieron en la elaboración de este trabajo fueron: durante la aplicación de los grupos focales los participantes no respondieron a todas las preguntas, por otra parte el diseño y construcción de los materiales didácticos debían ser previamente analizados, ya que se refieren a sistemas dinámicos complejos.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1 Problemática.

Uno de los objetivos más comunes que tienen los docentes de hoy en día es lograr que sus alumnos: razonen, analicen, interpreten, etc., las diferentes situaciones o problemas que se generen, ya sea dentro o fuera del aula de clases. Lo más importante es que los estudiantes busquen dar solución a dichos problemas usando variadas técnicas o métodos de aprendizaje, donde el docente debe proveer de las herramientas u orientaciones necesarias para que el proceso de enseñanza-aprendizaje se construya de la manera más óptima. Sepúlveda A., Medina & Sepúlveda D. (2009) mencionan que Polya (1945) "establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana" (p. 81)

Si se recuerda la educación tradicional, el docente se centraba en una educación bancaria. Es decir, solo transmisión de conocimientos sin importar: el proceso de enseñanza y aprendizaje, la forma como aprenden los estudiantes, sus necesidades e intereses, los factores tanto internos como externos que influyen en su aprendizaje, los métodos o estrategias que mejoren la compresión... Sin embargo, en los últimos años dentro de las diferentes áreas de conocimiento se ha empezado a dar mayor atención al proceso en sí de aprendizaje, tomando en cuenta los diferentes elementos o factores que influyen en dicho proceso. En el ámbito de la Física no es la excepción, pues es muy común que los estudiantes presenten dificultades al momento de analizar o interpretar problemas de Mecánica.

En una encuesta realizada a estudiantes del programa de Física que se imparte en las Preparatorias de la Universidad Autónoma de Nuevo León los resultados demostraron que los alumnos, "aunque consideran importante el aprendizaje de la Física, reportan que lo olvidan fácilmente y que tienen dificultades tanto para comprender los enunciados como para realizar las operaciones matemáticas requeridas en la aplicación de las fórmulas". Elizoldo (2013) (p.73). Entonces, ¿A qué se debe que los estudiantes tengan dificultad para comprender los enunciados y realizar las operaciones matemáticas en el estudio de la Física en general? Es posible que la dificultad en la comprensión de los diversos problemas en Mecánica Analítica, que es una rama de la Física, pudiera deberse a conceptos abstractos y ejercicios o problemas de difícil visualización.

Por otra parte, es muy común ver en textos de Física que los temas de estudio, ejemplos modelo, enunciados de problemas, entre otros, se presenten mediante imágenes, fotografías o ilustraciones que tratan de mostrar la realidad de la situación. De cierta forma podemos decir que las imágenes son útiles para ilustrar los fenómenos, logrando mostrar en parte el funcionamiento de un sistema físico, según Pérez R., Pérez A. & Bastién (2005) "Los hechos, los ejemplos y experiencias captadas por las sensaciones y las percepciones se convierten en representaciones e imágenes mentales, más o menos organizadas, que se suelen asociar a otras representaciones" (p. 2) Por ejemplo, supongamos que tenemos un problema sobre un sistema de partículas acopladas mediante poleas; solo con el enunciado sería complicado analizarlo, pero si se acompaña con una fotografía, esta permitirá reconocer sus elementos y relacionarlo con ideas o experiencias previas.

Pero, si bien es cierto, las imágenes, ilustraciones o fotografías en un libro de texto sirven para mostrar un ejemplo o representar un problema, por ejemplo sistemas dinámicos en Mecánica Analítica, en muchas situaciones no son suficientes para obtener toda la información necesaria e interpretar o analizar dicho problema. Tal como lo afirma Muñoz, (2014) con respecto al uso de imágenes "no es suficiente para facilitar la comprensión de la Física y mejorar los resultados en esta materia, es necesario ir más allá, innovar en cuanto a recursos didácticos para adaptarse a los alumnos y sus procesos mentales". Esta dificultad en la compresión puede deberse a que ciertos problemas se refieren a sistemas de partículas o cuerpos sólidos, los cuales interactúan en el espacio tridimensional que a su vez se trasladan o rotan con respecto a algún sistema de referencia.

Se ha observado que los estudiantes presentan ciertas dificultades al momento de revisar contenidos de Física en general, ya sea al resolver las operaciones matemáticas o al tratar de comprender los enunciados de los problemas, lo que sin duda hace pensar en la posibilidad de que las dificultades se deben a que ciertos problemas son presentados mediante imágenes, fotografías o ilustraciones donde el estudiante en muchos casos debe imaginarse la situación, pudiendo generar una mala interpretación de la información, pues, en el caso de la Mecánica Analítica muchos problemas se refieren a sistemas complejos de varias partículas o sólidos que se trasladan o rotan, en el espacio.

1.2 Enfoque Constructivista.

La teoría Constructivista surgió a principios del siglo XX como una propuesta de enseñanza-aprendizaje centrada en el proceso de construcción del conocimiento, tomando en cuenta las diversas maneras en que las personas aprenden, de acuerdo a sus condiciones biológicas, cognitivas, psicológicas, emocionales, sociales, culturales, etc. Además, intentando superar la forma de instrucción tradicional, donde solo el docente era el encargado de transmitir el conocimiento mecánicamente, y los estudiantes cumpliendo un rol pasivo, memorístico sin oportunidad de razonar y sacar sus propias conclusiones.

El constructivismo según Ortiz (2015) se genera mediante "una interacción dialéctica entre los conocimientos del docente y los del estudiante" (p. 97); por su parte Carretero (1997) define el constructivismo de la siguiente manera:

> Básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. (p.3)

De lo anterior podemos decir que la construcción del conocimiento es un proceso interno que genera cada estudiante, pero que es el resultado de una interacción social. Cada individuo está en la capacidad de indagar, seleccionar, organizar y transformar la información proveniente de diversas fuentes, de tal manera que logre ampliar o ajustar lo aprendido a profundidad como resultado de su participación en un proceso dinámico. Aunque, también se consideran aspectos afectivos, tales como sentimientos o emociones. Sin embargo, eso no implica dejar que el estudiante aprenda todo por su propia cuenta, sino que requiere la orientación o guía del docente o cualquier otra persona que tenga mayor conocimiento, ya que es importante que se genere el diálogo o debate entre los diferentes actores, intercambiando información o puntos vista con la finalidad de llegar a consensos o conclusiones de los temas estudiados.

En lo que respecta al aprendizaje y los procesos educativos, el enfoque constructivista se presenta como un modelo pedagógico, el cual se fundamenta en objetivos, conceptos, secuenciación, estrategias, recursos y evaluación del aprendizaje, con el fin de que los estudiantes construyan el conocimiento de forma más significativa, y sobre todo invite al estudiante a "aprender a aprender", de tal forma que dichos aprendizajes sean útiles y aplicables a situaciones de la vida cotidiana.

Las teorías de aprendizaje constructivistas utilizadas en la elaboración de este proyecto son las siguientes: La Teoría Sociocultural de Vygotsky y La Teoría del Aprendizaje significativo de David Ausubel; a continuación se presentarán cada una de ellas.

1.2.1 Teoría sociocultural de Lev Vygotski

Vygotski considera que el conocimiento se genera durante el proceso de interacción entre el estudiante que tiene la intención de aprender, y el medio que lo rodea, pero entiéndase el medio como social y cultural. Por lo tanto la función que cumplen: el docente, compañeros, padres de familia, entre otros, es esencial para que los estudiantes desarrollen todas sus capacidades cognitivas; en esta situación los actores del medio externo se convierten en facilitadores, guías, orientadores, etc., del conocimiento. Para analizar los problemas que aparecen en la construcción del conocimiento entre sujeto y objeto Vygotsky planteó el uso de instrumentos socioculturales: herramientas y signos.

Chaves (2001) puntualiza que "Las herramientas producen cambios en los objetos y los signos transforman internamente al sujeto que ejecuta la acción" (p. 60). Es decir, se produce una acción mediadora entre las herramientas que actúan sobre el objeto como por ejemplo los recursos materiales o tecnológicos y los signos modifican los sistemas internamente, controlando el desarrollo de las capacidades psicológicas del estudiante; por ejemplo mediante el lenguaje, escritura, etc., cuando dichos signos ya han sido interiorizados y comprendidos, están en la capacidad de transformar las ideas o conceptos que el estudiante posee.

Por otra parte, la construcción del conocimiento se crea en un ambiente social mediante la internalización de la información que viene del exterior con las estructuras o esquemas mentales que el estudiante posee, tal como lo afirman Yacuzzi & Borzi (2015) "Las funciones mentales superiores tales como el razonamiento, la solución de problemas, el pensamiento, y la memoria lógica, son internalizadas por el individuo a partir del aprendizaje cooperativo, mediatizados por el lenguaje como herramienta cultural de intercambio" (p. 9). En esta situación se puede observar claramente la importancia del lenguaje, ya que es el medio de comunicación directa del estudiante con los diferentes actores ya sea docente, compañeros, familiares o la sociedad en general, pues mediante el intercambio de ideas o conceptos permite la solución de problemas y su desarrollo cognitivo.

Teoría de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)

La teoría de ZDP de Vygotsky se refiere a la ayuda que puede brindar una persona con mayor conocimiento, ya sea un docente o compañero que domine un contenido específico, a otro estudiante que tenga dificultad en comprender dicho contenido.

> Para Vygotsky 1998, citado por Rivera (2016) la ZDP representa "la distancia entre el nivel real de desarrollo, sustentado por la capacidad de resolver de forma independiente un problema y el nivel de desarrollo potencial, que se expresa a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (p.612)

En consecuencia se puede decir que la construcción del conocimiento mediante la teoría de ZDP puede darse de forma colaborativa, por ejemplo si un estudiante siente la necesidad de aprender, en principio tratará de comprender la parte conceptual o resolver un problema de forma individual, este se encuentra en su nivel real de desarrollo; pero si se presenta alguna dificultad, requerirá la ayuda de otra persona que tenga mayor conocimiento sobre el tema, convirtiéndose en un nivel de desarrollo potencial.

1.2.2 Aprendizaje Significativo de David Ausubel

Ausubel hizo grandes aportes a la psicología cognitiva, donde intentó explicar el proceso de generación y construcción del conocimiento mediante la teoría del Aprendizaje Significativo. Esta teoría plantea que los individuos poseen estructuras cognitivas –conjunto de ideas o conceptos– y para aprender significativamente se debe crear un vínculo, entre los conceptos o ideas que posee, con la nueva información.

Lo dicho anteriormente se sintetiza en una frase citada por Ausubel (1976) "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente" (p.6). Es decir, se refiere a la importancia de indagar o averiguar los conocimientos que posee un estudiante antes de desarrollar un nuevo tema, y así tener un punto de partida para enseñar o transmitir nuevos conocimientos.

Por su parte Palmero (2008) se refiere a la teoría planteada por Ausubel como "el proceso que se genera en la mente humana cuando subsume nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva" (p.26). El autor utiliza la palabra "subsumidores" o ideas de anclaje para referirse a ciertos elementos necesarios para que se cree un proceso de interacción entre la nueva información con la estructura cognitiva del estudiante. Además, la información debe

tener un significado relevante, real e independiente. De igual manera resalta ciertas condiciones o factores que influyen en la construcción de un aprendizaje significativo:

- El estudiante debe tener predisposición para aprender.
- Presentación de un material potencialmente significativo el cual debe tener: significado lógico relacionable con la estructura cognitiva del que aprende y la existencia de ideas de anclaje o subsumidores adecuados y pertinentes, permitiendo interacción con el nuevo material.

Para crear aprendizajes significativos deben estar presentes todos los elementos antes mencionados, partiendo del componente afectivo o emocional, es decir, el grado de motivación y predisposición del estudiante por aprender, un material potencialmente significativo, el cual haya sido previamente seleccionado por el docente para utilizarse de manera secuenciada de acuerdo a las necesidades y objetivos de aprendizaje, y finalmente la presencia de los "subsumidores" en la estructura cognitiva del estudiante, los cuales sirvan de anclaje para integrar un nuevo conocimiento.

El aprendizaje significativo puede ser de tres tipos: representacional, se da cuando determinados símbolos representan de forma significativa a un referente ya sean objetos o eventos, además se establece cierta relación de correspondencia entre el símbolo y su referente; conceptual, en este aprendizaje no es necesario un referente, sino que directamente se dota de significado al símbolo; finalmente el proposicional, usa la proposición para dotar de significado a nuevas ideas o conceptos, también hace uso de ideas expresadas verbalmente. (Moreira, 2012)

Sin duda la teoría planteada por Ausubel ha sido muy influyente en el campo educativo, debido a que plantea ciertos elementos importantes a tomar en cuenta al momento de planificar una clase. Pues, es necesario seleccionar los contenidos y materiales de apoyo adecuados, con significado lógico, coherentes con la estructura cognitiva y, lo más importante, que despierte la curiosidad e interés del estudiante y se predisponga a aprender.

1.3 Estrategias de enseñanza-aprendizaje

¿Qué se entiende por estrategias de enseñanza y aprendizaje? Se puede decir que las estrategias de enseñanza son un conjunto de técnicas y métodos que usa el docente para impartir o trasmitir el conocimiento. Generalmente se presentan mediante una planificación secuencialmente estructurada de contenidos, procedimientos, operaciones o actividades específicas, con la finalidad de alcanzar objetivos previamente establecidos. Por otro lado las

estrategias de aprendizaje son aquellas técnicas y métodos utilizados por los estudiantes con la finalidad de adquirir nuevos conocimientos de acuerdo a intereses o afinidades por determinada asignatura, ya que de esto dependerá el grado de motivación por aprender.

La Universidad de Las Américas (2015) clasificó los métodos de enseñanza en las siguientes:

a. Método tradicional o de control docente**.** A través de este método el docente entrega a los estudiantes diversos saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales.
b. Método facilitador de la comprensión o de control del docente y el estudiante. A través de este método el docente ayuda a los estudiantes a construir un significado que les permita comprender las ideas y procesos claves; los guía en discusiones en torno a problemas complejos, textos, casos, proyectos o situaciones, generando instancias para el cuestionamiento, el establecimiento de pruebas y la reflexión sobre procesos.
c. Método de revisión del desempeño o de control del estudiante. A través de este método el docente evalúa el trabajo autónomo de los estudiantes mediante la demostración o simulación de saberes profesionales vinculados al mundo laboral. (p.7)

El estudio de la Física en general, requiere el uso de diversas estrategias metodológicas, centrándose en técnicas o métodos adecuados de enseñanza y aprendizaje, los cuales ofrezcan al estudiante varias herramientas para desarrollar aprendizajes significativos. Por ejemplo, al estudiar ciertas demostraciones o desarrollos teóricos en Mecánica Analítica se requiere del apoyo docente, impartiendo saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales. Sin embargo, no implica que todo el desarrollo lo haga el docente, más bien debe ser un guía, interactuando con los estudiantes, creando cuestionamientos o reflexiones; a continuación se muestran algunas técnicas usadas en el desarrollo de una clase.

1.3.1 Lluvia de ideas

Es una técnica que por lo general se usa antes de estudiar un nuevo contenido. Tiene la intención de generar interacción entre los participantes de un determinado grupo sobre las diferentes ideas, conocimientos o puntos de vista que tengan cada uno de ellos. En este sentido Galdámez, Sanz, & De Giusti (2011) mencionan que: “El Brainstorming, también denominado lluvia de ideas o tormenta de ideas, es una técnica de trabajo que facilita el surgimiento de nuevas ideas sobre un tema o problema determinado” (p.511).

El docente deberá llamar la atención de los estudiantes, motivándolos a participar, puede anotar las ideas en una pizarrra, el propósito es generar reflexión, diálogo, discusión guiada… de tal manera que se logre activar los conocimientos previos, pero, teniendo claro lo que se espera que los estudiantes aprendan. Mediante una lluvia de ideas el docente podrá conocer el nivel de conocimientos que tienen los estudiantes sobre determinado tema, y así obtener una visión general y un punto de partida para enseñar los nuevos contenidos.

1.3.2 Trabajo colaborativo

El trabajo colaborativo como estrategia didáctica se destaca debido a que los integrantes de un grupo persiguen objetivos en común y la responsabilidad es compartida. Permite alcanzar resultados de aprendizaje, tanto en el ámbito académico como actitudinal, por ejemplo la comunicación, tolerancia, compromiso, etc., tal como lo afirman Collazos & Mendoza (2006). "Los métodos de aprendizaje colaborativo comparten la idea de que los estudiantes trabajan juntos para aprender y son responsables del aprendizaje de sus compañeros tanto como del suyo propio" (p.2)

Por otra parte, el docente debe guiar una actividad grupal, formando grupos homogéneos o heterogéneos de acuerdo a las necesidades u objetivos que se deseen lograr, de tal manera que cada integrante aporte con sus ideas, conocimientos, habilidades, etc.; otro aspecto importante es el seguimiento que debe realizar el docente con la finalidad de despejar las dudas e inquietudes generadas durante el desarrollo de las actividades.

1.4 Recursos didácticos

Son variadas las concepciones y definiciones sobre el material didáctico, ya sea como soporte en la acción docente o como herramienta que permite la adquisición del conocimiento por parte de los estudiantes. Los materiales didácticos pueden ser tanto físicos como virtuales. Armas (2009) define el material didáctico como "cualquier elemento que, en un contexto educativo determinado, es utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas". Es importante mencionar que un material didáctico en sí mismo no tienen mucha relevancia, más bien cobran sentido cuando es utilizado con una finalidad didáctica, es decir, cuando tiene la intención de transmitir un mensaje.

A continuación se presenta una clasificación de los materiales didácticos según López (1981) citado por Juárez, Vega, Espinosa & Hidalgo (2014)

- Impresos: textos, cuadernos de ejercicios.

- Material manipulable: instrumentos de medición, maquetas, modelos físicos, etc.
- Audiovisuales e informáticos: páginas web, software, simuladores, calculadoras, presentaciones, etc.

Dentro de los materiales manipulables se destacan las maquetas; Morales (2012) las define como "la reproducción física "a escala", en tres dimensiones, por lo general en tamaño reducido de algo real o ficticio" (p.23). La utilidad de una maqueta está en el hecho de tener una representación física de un objeto tridimensional, que a su vez permiten reconocer y visualizar elementos que comúnmente no es posible con alguna representación en dos dimensiones, por ejemplo en una imagen o fotografía.

1.4.1 Recursos tecnológicos.

Los recursos tecnológicos en la actualidad juegan un papel importante dentro del ámbito educativo, debido a permiten acceder a diferentes fuentes de información, proveer medios audiovisuales, simular fenómenos físicos, etc.; esto implica que los docentes se deben ajustar a las nuevas exigencias en el ámbito educativo usando recursos tecnológicos. En este sentido Sánchez, Moreno, & Torres (2014) comentan que "Los alumnos necesitan utilizar los diversos medios tecnológicos para formar su futuro profesional. Esta situación provoca impulsar nuevas y variadas maneras de ejercer la docencia, saber aprovechar las nuevas tecnologías de información y comunicación". (p. 186)

Uno de los recursos comúnmente usados hoy en día son las páginas web, esta herramienta proporcionan al alumno o docente variada información, por ejemplo: YouTube. Para Jiménez, Mora, & Cuadros (2016): "El popular sitio web que permite a los usuarios compartir y visualizar vídeos ofrece un sinfín de aplicaciones al aula, desde el momento en que los usuarios pueden "subir" documentales, series, canciones, tutoriales…" (p.213). Cabe señalar que el docente debe seleccionar de la red, material objetivo y adecuado para la enseñanza; así también recomendar a los alumnos, blogs, videos, series, etc., pertinentes de acuerdo a las necesidades y objetivos de aprendizaje.

Otro de los recursos tecnológicos útiles en el estudio de la Física en general son los simuladores. Simulación se trata de una estrategia didáctica que permite al estudiante acercarse a situaciones reales pero de forma ficcional; la Universidad de Las Américas (2015) señala que en la actualidad se destacan las simulaciones virtuales debido a que "Activan habilidades de manejo de informaciones y tecnologías, uso de símbolos, gráficos y datos, y comprensión de problemas" (p.36). Mediante un simulador virtual es posible visualizar el

comportamiento dinámico de un fenómeno físico, por ejemplo un sistema de partículas acopladas mediante resortes, un péndulo doble, etc.

1.4.2 Importancia del material didáctico en el estudio de la Física.

Dentro del aula es común ver el desarrollo de una clase con el uso de una pizarra, papel y lápiz; en ocasiones puede ser suficiente para la comprensión de algún tema, depende de la complejidad y el nivel de percepción del estudiante. Pero, ¿qué pasa cuando los contenidos se vuelven complejos, de difícil análisis o interpretación? Sin duda se convierte en un reto, tanto para el docente como el estudiante. Aquí surge la importancia de un material o recurso que facilite la comprensión, sirviendo de apoyo didáctico al docente y a su vez permita al estudiante construir el conocimiento de forma significativa.

Todo material didáctico debe ser previamente seleccionado, acoplándose a las necesidades e intereses del estudiante. Deben tener una finalidad didáctica, es decir intención de enseñar, para dinamizar el proceso de aprendizaje, pero de forma práctica siendo mediadores con la realidad, tal como lo afirma Orozco & Henao (2013) "El material didáctico es una alternativa para el aprendizaje práctico-significativo, que depende, en gran medida, de la implementación y apropiación que haga el docente de ello en su propuesta metodológica" (p.105). Esto resalta la importancia de que los materiales didácticos sean potencialmente significativos y sobre todo permitan relacionar la parte conceptual con la práctica.

Otra de las bondades que ofrece el material didáctico en el estudio de la Física es que permite un acercamiento a los fenómenos físicos. El docente o estudiante puede manipular y visualizar directamente el material y comprender de mejor manera dichos fenómenos, ya que muchas situaciones o problemas se refieren a mecanismos dinámicos complejos, por ejemplo cuerpos rígidos que se trasladan o rotan respecto a algún marco de referencia en el espacio, en este caso es complicado hacerse una idea de su movimiento y definir ciertos parámetros o variables necesarias para analizar el fenómeno.

Finalmente, cabe mencionar la función motivadora que cumple un material didáctico. Es necesario que un estudiante se sienta motivado por aprender, y qué mejor manera de hacerlo mediante el material concreto, pues, permitirá relacionar de manera adecuada la parte conceptual con una situación real o práctica; por ejemplo representada mediante una maqueta o modelo físico, logrando así despertar el interés del estudiante por aprender.

1.5 Guía didáctica en el proceso educativo.

Una guía didáctica cumple la función de apoyar la labor docente. García & de la Cruz (2014) lo define como un "instrumento digital o impreso que constituye un recurso para el aprendizaje a través del cual se concreta la acción del profesor y los estudiantes dentro del proceso docente, de forma planificada y organizada" (p. 165). Es por eso que una de las ventajas más comunes de la guía didáctica es que contiene orientaciones metodológicas para el desarrollo de los contenidos.

Las orientaciones metodológicas en una guía docente se encuentran planeadas de forma sistemática, con diversas estrategias didácticas que facilitan la construcción del conocimiento por parte del estudiante. En el caso de una guía de uso de material concreto o maqueta, se cuenta con indicaciones y recomendaciones sobre la forma de usar el material y sacar el mayor provecho en el desarrollo de contenidos específicos, ya sea al explicar la parte conceptual o para la resolución de problemas.

CAPÍTULO II

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

2.1 Metodología

Con la finalidad de obtener información respecto a las experiencias y posibles dificultades que hayan tenido los alumnos al momento de estudiar la asignatura de Mecánica Analítica, se optó por una metodología de recolección de datos de tipo cualitativa: La técnica de "Grupo Focal". Bonilla & Escobar (2017) definen los grupos focales como "una técnica de recolección de datos mediante una entrevista grupal semiestructurada, la cual gira alrededor de una temática propuesta por el investigador". (p.52)

Con el propósito de ampliar la información se realizaron también dos entrevistas a docentes que han impartido la asignatura, como segunda técnica de investigación. Se planteó una guía de preguntas abiertas que permitan interactuar con el entrevistado, pues se trata de una técnica de investigación muy conocida en la actualidad. Díaz, Torruco, Martínez, & Varela (2013), se refieren a la entrevista como: "la comunicación interpersonal establecida entre el investigador y el sujeto de estudio, a fin de obtener respuestas verbales a las interrogantes planteadas sobre el problema propuesto" (p. 163).

2.2 Selección de la muestra

Los participantes seleccionados para la recolección de información fueron estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca de los períodos: Marzo - Agosto 2019, de un total de 27 estudiantes fueron seleccionados 6, los cuales están cursando la asignatura de Mecánica Analítica y del periodo Septiembre 2017 - Febrero 2018, de un total de 15 estudiantes fueron seleccionados 6, los cuales ya cursaron la asignatura de Mecánica Analítica.

Adicionalmente se realizaron dos entrevistas a docentes de la Asignatura de Mecánica Analítica, con el objetivo de recolectar mayor información y corroborar los resultados obtenidos en la primera técnica de investigación.

2.3 Aplicación de los Grupos focales

Los Grupos Focales aplicados a los estudiantes se realizaron con una guía de preguntas abiertas. Se formaron dos Grupos Focales, cada grupo estaba conformado por 6 estudiantes, con tres estudiantes de cada periodo Marzo-Agosto 2019 y Septiembre 2017 - Febrero 2018.

La finalidad fue conformar grupos heterogéneos y así lograr que interactúen entre ellos dando sus diferentes puntos de vista a las preguntas planteadas por el moderador. La información brindada por los participantes fue grabada en audio, con pleno consentimiento de cada uno de ellos; posteriormente se transcribió para realizar el proceso de análisis.

Las personas que ocuparon el cargo de moderador y relator fueron los autores de este trabajo de titulación. El moderador fue el encargado de plantear las preguntas a los participantes del grupo e incentivar que participen dando sus opiniones o diferentes puntos de vista a las preguntas planteadas, mientras que el anotador se encargó de hacer anotaciones, y brindar ayuda a cualquier duda sobre alguna pregunta de los participantes, y finalmente dio a conocer brevemente lo que se ha tratado en el grupo.

2.3.1 Análisis de resultados "Grupos focales realizado a estudiantes"

Objetivo: Analizar las posibles dificultades que presentan los estudiantes al momento de estudiar Mecánica Analítica, para posteriormente elaborar recursos didácticos.

La transcripción de las opiniones emitidas por los participantes se realizó inmediatamente después de haber culminado la reunión grupal. Para el análisis, la información obtenida en ambos grupos focales se colocó en una sola tabla. Para diferenciar a los participantes del grupo 1 y grupo 2 se usó la siguiente codificación: A1, B1, C1,… y A2, B2, C2,…, respectivamente. (Cabe indicar que: algunas preguntas no fueron contestadas por todos los participantes).

El primer paso consistió en ordenar y seleccionar la información más relevante, luego se establecieron categorías y códigos. De Pizarro (2000) define: "Las categorías se refieren a situaciones, contextos, acontecimientos, comportamientos, opiniones, perspectivas sobre un problema [...] Una vez establecidas las categorías, a cada una se le asigna un código indicativo (letras, números, colores...) que permita distinguir cada fragmento de información". (p. 43). En este caso se escogieron algunas preguntas de la guía usada en el grupo focal como categorías provisionales e iniciales, las cuales se muestran en la tabla 2.1, la finalidad fue obtener una visión general de la información y un punto de partida para un análisis descriptivo más exhaustivo.

Tabla 2.1

Categorías y códigos iniciales del análisis de los grupos focales

Categorías iniciales	Códigos
Mecánica analítica	Características en general: interesante, compleja, aplicada a la realidad...
Conocimientos previos	En matemáticas y Física, dificultad que se presenta debido a la carencia de las mismas.
Dificultad comprensión de la Mecánica Analítica	Enunciados de problemas presentados en imágenes, pasa de lo bidimensional a lo tridimensional, las imágenes son estáticas mientras que el fenómeno está en movimiento...
Beneficios de usar recursos didácticos	Mejoran la visualización espacial. Son manipulables.
Experiencias trabajando en grupo	Compartir ideas o puntos de vista. Apoyo entre compañeros para descubrir errores.

Con el propósito de ordenar y establecer relaciones internas entre las categorías y así obtener un conocimiento más profundo sobre los significados correspondientes a las opiniones de los participantes, se hizo uso de la herramienta ATLAS ti. La ventaja de esta herramienta es que permite crear relaciones existentes entre categorías, y a su vez analizar e interpretar de la información obtenida. Con la herramienta antes mencionada se logró establecer cuatro categorías, las cuales se dividen en subcategorías o códigos:

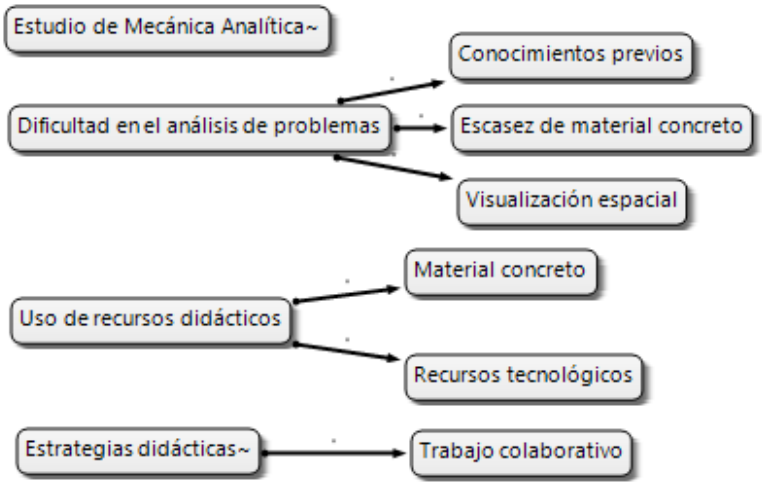


Figura 2.1. Categorías y códigos del análisis de los grupos focales

El segundo paso consistió en el análisis descriptivo de cada una de las categorías establecidas con la herramienta ATLAS ti. A continuación se muestra el análisis e interpretación correspondiente a cada una de ellas:

Estudio de la Mecánica Analítica.

Con la finalidad de conocer cuál es la aceptación por la asignatura de Mecánica Analítica se planteó una pregunta donde se pide una opinión general sobre la misma, las opiniones son variadas:

"Interesante, al principio un poco extraño, diferente a la mecánica clásica […] En ciertas ocasiones simplifica los estudios […] Es un poco difícil". (A1)

"Hay cosas más aplicativas a la vida real, es un poco compleja […] Difícil la parte visual".

"Es más llevada a la vida real a diferencia de la mecánica clásica". (C1)

"A mí sí me parece difícil, la verdad, entenderle porque hay que tener una amplia y variedad de conceptos". (D2)

"Concuerdo con mis compañeros, en realidad fue un gran reto porque desde el inicio nos dijeron que era algo más complicado" (A2)

"[…] Yo creo que el ver análisis y también el proceso nos hizo dar un poco de temor al inicio" (F2)

Figura 2.2. Opiniones sobre "Estudio de la Mecánica Analítica"

Se observa en la figura 2.2 que los estudiantes consideran la asignatura interesante, con situaciones aplicativas a la vida real, aunque mencionan haber tenido dificultades en cuanto a la visualización espacial, el proceso de análisis y desarrollo de los problemas y la variedad de conocimientos para abordar la materia. Enseguida se preguntó por los conocimientos previos, las respuestas fueron varias, tanto en el área de Matemáticas y Física; a continuación se resumen en la siguiente figura.

Matemáticas: cálculo diferencial, trigonometría, álgebra básica, cálculo de varias variables.
Física: magnitudes, fuerzas, momentos de inercia, dinámica de cuerpos rígidos, energías: cinética y potencial.

Figura 2.3. Opiniones sobre "Los conocimientos previos"

Dificultad en el análisis de problemas

Para conocer cuáles han sido las dificultades más comunes que han tenido los estudiantes al momento de estudiar los contenidos de Mecánica Analítica se plantearon los siguientes tópicos: 1) Los contenidos han sido comprendidos con claridad o ha tenido alguna dificultad. 2) Los enunciados de los problemas presentan con imágenes, fotografías, ilustraciones han sido suficientes para analizar y obtener toda la información del sistema. 3) Los materiales didácticos que ha usado el docente. Las opiniones más significativas de los participantes se presentan en la siguiente figura mediante citas textuales:

"Creo que ya lo mencionaron los compañeros que fueron las bases anteriores […] lo que ya decíamos la falta de material concreto […] para mejorar esa visión." (B1)

"En el libro las imágenes son estáticos y están en dos dimensiones y en realidad no son así" (A1)

"Son digamos objetos en tres dimensiones y no se logra apreciar completamente el objeto, entonces, no a veces no se logra imaginar completamente cómo es el movimiento" (E1)

"La visualización espacial por la falta de un material concreto que nos ayude a entender el fenómeno, ese fue mi problema" (A2)

"Concuerdo y gratifico la idea de que para poder comenzar con el análisis necesitábamos saber el movimiento realmente del ejercicio" (C2)

"Yo creo que en Mecánica Analítica un ejercicio en sí involucra demasiados, demasiados conceptos matemáticos […] a veces, uno ahí, uno se confunde." (D2)

"El proceso es largo sí, pero, si tenemos un buen análisis creo que ya es secundario." (F2)

"El docente utiliza material concreto […] siempre utilizaba modelos de la situación en sí y los beneficios que nos aportaban era que nos generan mayor comprensión de la situación" (F1)

"*No utilizaba ningún material, pero de cierta manera el Doctor (docente) se las apañaba (buscaba) explicar el fenómeno"* (A2)

Figura 2.3. Opiniones sobre "Dificultad en el análisis de problemas"

Los comentarios demuestran que los estudiantes sí presentaron dificultades al momento de analizar problemas de Mecánica Analítica, por una parte comentaron sobre las bases o conocimientos previos, esto ya quedó demostrado anteriormente, donde los estudiantes nombraron varios conceptos tanto de Matemáticas como de Física; por otra parte está la dificultad en la visualización espacial, pues mencionan que las imágenes en un libro de texto son estáticas solo en dos dimensiones y los ejercicios son situaciones reales, las cuales a su

vez se trasladan o rotan en el espacio. A esto hay que sumarle el análisis y el desarrollo de los problemas que son extensos y la escasez de material concreto.

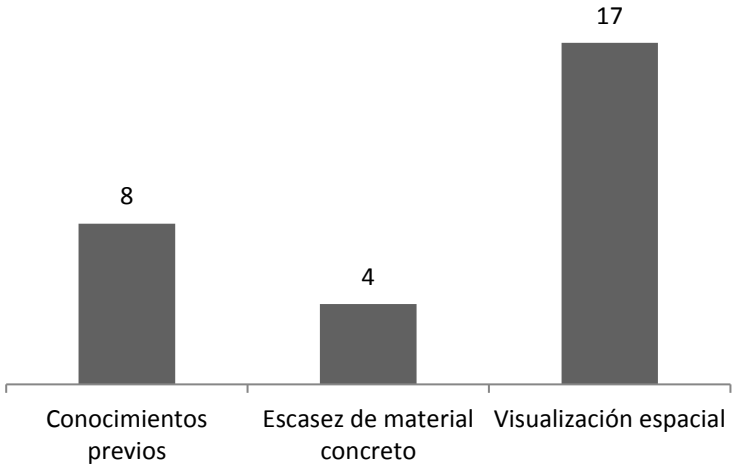


Figura 2.4. Análisis cuantitativo sobre la categoría "Dificultades en el análisis de problemas"

En la gráfica 2.4 se muestra la categoría "Dificultad en el análisis de problemas", donde, mediante el uso de la herramienta ATLAS ti, se logró cuantificar las "co-cocurrencias", es decir, el número de veces que las citas textuales se repiten en cada código: a) se contabilizaron 17 citas textuales donde los estudiantes comentaron haber tenido dificultades en la visualización espacial, b) 8 estudiantes comentaron haber tenido dificultades debido a los conocimientos previos, y c) 4 estudiantes comentaron que las dificultades se presentaron debido a la escasez de material concreto. Debido a la gran cantidad de comentarios emitidos por los participantes sobre la dificultad de visualización espacial, se evidencia el problema y la necesidad de elaborar material concreto para el estudio de los temas de Mecánica Analítica.

Uso de recursos didácticos.

Con la finalidad de obtener información respecto al uso e importancia de los recursos didácticos, las preguntas planteadas se centraron en conocer qué recursos consideran los estudiantes los más adecuados para el estudio de la Mecánica Analítica, tanto en material concreto como en recursos tecnológicos. La información se presenta en la figura 2.5 mediante citas textuales.

"Los simuladores como Modellus […], el material concreto lo que sí también pueda ser manipulado por los estudiantes no únicamente por el docente" (C1)

"[…] material concreto que es manipulado por el docente, también sea duplicado y también sea impartido para cada uno de los estudiantes si fuera posible" (F1)

"Yo pienso que antes que un material concreto un software, es o sea diseñar algún tipo de software, yo creo que sería más fácil emplearlo" (E1)

"Páginas web, […] o graficadoras como mencionaba el Modellus te da el movimiento o te genera el movimiento" (B1)

"Videos donde estén más claras las explicaciones." (A1)

"Lo que nos va a ayudar más sería una maqueta para ya verla así todo en su forma 3D" (B2)

"Concuerdo con la compañera, lo ideal sería tener algo físico, sé que talvez nos podría indicar mediante algún programa, pero el tener algo tangible nos ayuda mucho más a comprender, lo estamos viendo" (F2)

"No basta con solo decir que el software o el otro, sino que como que debería haber una parte como que digamos que te enseñen a cómo manejarlo" (C1)

"Bueno yo me mantengo con lo que acabé de decir hace rato, sí sería de ayuda software o cualquier otra aplicación, depende también del estudiante […] a mi parecer según mi experiencia una maqueta es más fácil de comprender." (F2)

"Yo creo que los recursos tecnológicos más serían como un complemento […] ya a una maqueta, después de ya haber entendido bien manipulado bien a la maqueta podríamos tal vez usar un software como refuerzo." (D2)

Figura 2.5. Opiniones sobre "Uso de recursos didácticos"

En esta categoría son variadas las opiniones respecto al uso de recursos didácticos, prácticamente todos concuerdan con su importancia. Sin embargo, existen opiniones divididas con respecto al uso de material concreto y recursos didácticos. Por una parte, están aquellos que defienden los recursos tecnológicos tales como: simuladores, graficadoras, páginas web, y videos, pues afirman que su utilidad está en la flexibilidad al usarlos. Mientras que por otro lado están aquellos que prefieren el material concreto, comentan que tener algo tangible ayuda en la comprensión del fenómeno analizado, ya que muchos sistemas rotan o

están en movimiento. Además, comentan que sería bueno que los dos tipos de recursos se complementen y así sacar mayor provecho.

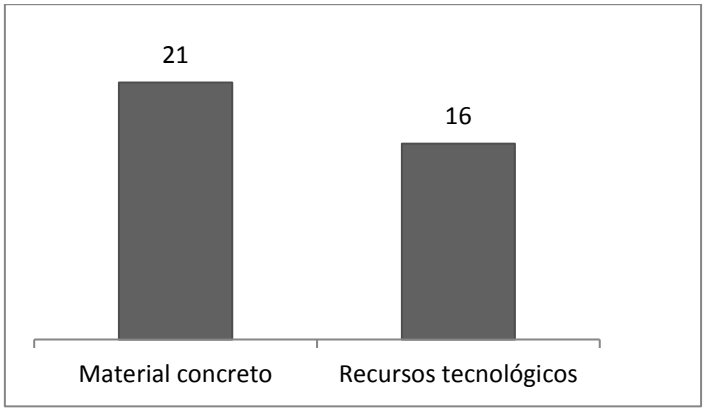


Figura 2.6. Análisis cuantitativo sobre la categoría "Uso de recursos didácticos"

La figura 2.6 muestra datos cuantificados realizados con ATLAS ti sobre la categoría "Uso de recursos didácticos", se observa que se contabilizaron 21 citas textuales donde los estudiantes mencionaron que consideran útil el uso de material concreto, específicamente maquetas, debido a que son fácilmente manipulables y mejoran la visualización espacial; con respecto al uso de recursos tecnológicos se contabilizaron 16 citas textuales en este caso resaltaron la importancia de los software o simuladores, páginas web y videos. Estos resultados confirman la construcción de material concreto.

Estrategia didáctica: Trabajo colaborativo

Cabe recalcar que el empleo de material didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje también se considera como estrategia didáctica, pero, en esta categoría solo se refiere al trabajo colaborativo, las opiniones de los estudiantes se presentan en la siguiente figura:

"Cuando nos quedamos trabajando, todas las explicaciones por ahí lo que no entendíamos bien ahí uno el otro lo entendía más o menos bien, entonces le explica ahí a uno y así nos vamos complementando entre todos" (A1)

"Es muy gratificante ya que ayuda a mejorar la comprensión, con los compañeros puedes simular lo que el problema te está diciendo" (C1)

"Genera un compartir de ideas, ver los distintos puntos de vista" (F1)

"Súper beneficioso porque además te complementa digamos uno se libera un poco porque ya tiene un apoyo [...] para esta materia me ha parecido súper interesante de gran ayuda" (E1)

"Como dijo el compañero, el hecho de aportar las ideas es muy importante" (E2)

"Bueno trabajar en grupo obviamente en cualquier contenido o materia va a ser siempre algo beneficioso" (B2)

Figura 2.7. Opiniones sobre "Trabajo colaborativo"

Las opiniones y experiencias que comentaron los estudiantes hace pensar en la gran utilidad del aprendizaje mediante el trabajo colaborativo dentro del aula; como ya lo mencionaron tiene varias ventajas entre ellas están: ayuda mutua entre compañeros sobre conceptos que no estén claros, aportar ideas o puntos de vista.

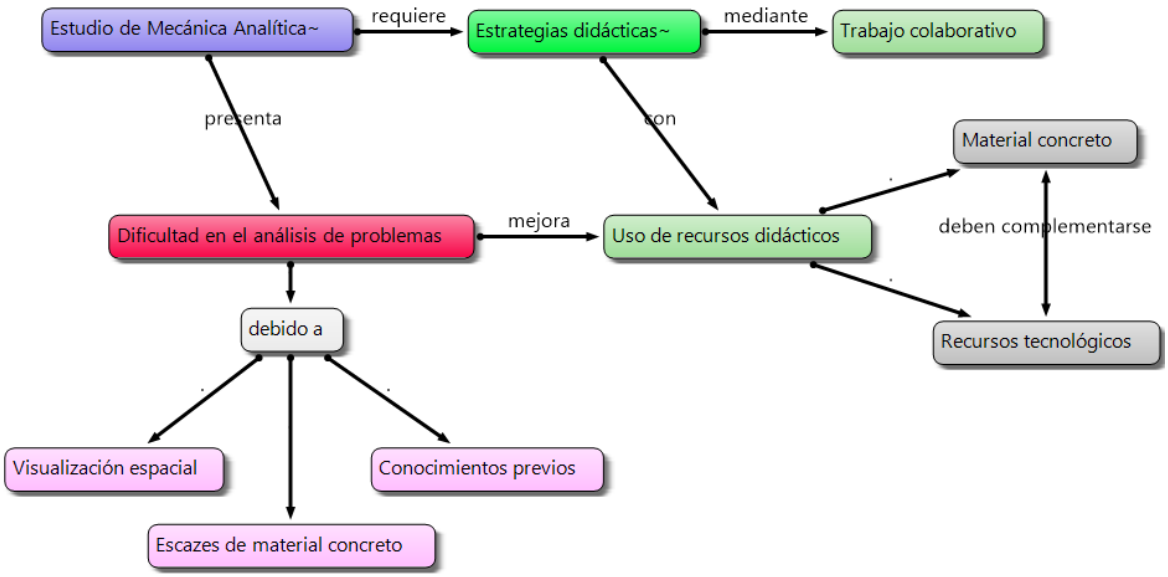


Figura 2.8. Relaciones entre categorías: grupos focales

La figura 2.8 muestra las relaciones existentes entre categorías, esto se resume en que el estudio de la Mecánica Analítica presenta ciertas dificultades al momento de analizar los diversos problemas planteados, lo cual se debe a: la amplia cantidad de conocimientos

previos tanto de Matemáticas como de Física, la escasez de recursos didácticos usados en clases y la visualización espacial, es decir, la dificultad en interpretar los enunciados de problemas presentados mediante imágenes, fotografías o ilustraciones de sistemas tridimensionales que se trasladan o rotan a la vez; todo esto lleva a pensar que dichas dificultades se podría solucionar con el uso de los recursos didácticos: el material concreto y el uso de recursos tecnológicos tales como simuladores, páginas web, videos… A esto hay que sumarle el trabajo colaborativo como estrategia didáctica.

Finalmente, dentro de las ventajas que presenta el uso de recursos didácticos están: mejoran la comprensión de los problemas, permiten una visualización espacial, son fácilmente manipulables, son llamativos y motivadores. Por todo lo dicho, se reafirma la propuesta de la elaboración de material didáctico concreto y el uso de estrategias didácticas en el estudio de la Mecánica Analítica.

2.4 Aplicación de entrevistas

Las entrevistas se aplicaron a dos docentes que impartieron la asignatura de Mecánica Analítica, con el propósito de conocer sus opiniones o puntos de vista sobre varias temáticas planteadas. La información brindada por los docentes fue grabada en audio, con pleno consentimiento de cada uno de ellos, posteriormente se transcribió para realizar el proceso de análisis.

2.4.1 Análisis de resultados "Entrevistas a docentes"

Objetivo: Obtener información de parte de docentes que hayan impartido Mecánica Analítica, sobre sus estrategias didácticas y las dificultades más comunes que los estudiantes presentan al analizar los diversos sistemas dinámicos.

La transcripción de las opiniones emitidas por los docentes se realizó inmediatamente después de haber culminado las entrevistas. Para realizar el análisis de la información y diferenciar a docente 1 y docente 2 se usó la codificación: A y B, respectivamente.

El primer paso consistió en ordenar y seleccionar la información más importante, luego se establecieron categorías y códigos que faciliten la interpretación de los resultados. En este caso se escogieron algunos temas de las preguntas guía usadas en las entrevistas como categorías provisionales e iniciales; la finalidad fue tener una visión general sobre la información y un punto de partida para realizar un análisis descriptivo.

Tabla 2.2

Categorías y códigos iniciales del análisis de entrevistas

Categorías iniciales	Códigos
Enseñanza de la Mecánica analítica	Rama de la Física estudia el comportamiento estático y dinámico desde otros puntos de vista Lagrange, D'Alambert, Hamilton…
	Procesos matemáticos que requieren visión tridimensional.
Estrategias didácticas	Enseñanza guiada, explicaciones y ejemplificaciones el uso de los recursos didácticos disponibles.
	Trabajo grupal, grupos de 5 estudiantes como máximo.
Uso de recursos didácticos	Mejoran la visualización y comprensión de los fenómenos.
	Conceptualización y visualización tridimensional del fenómeno.
	Maquetas (manipulables).
Dificultad en la enseñanza de asignatura	Parte conceptual (ámbito matemático y físico), y recursos que faciliten el proceso enseñanza-aprendizaje.
	Tener una visión tridimensional.
	Interpretar un diagrama bidimensional.
	Traslado de ciertos sistemas de coordenadas a otros sistemas de coordenadas (cartesianos, cilíndricos, esféricos).

Para establecer las relaciones existentes entre categorías al igual que los grupos focales se hizo uso de la herramienta ATLAS ti. La ventaja de esta herramienta es que permite crear relaciones existentes entre categorías y realizar una interpretación de la información obtenida. Con el uso de esta herramienta se logró establecer tres categorías, que a su vez se dividen en subcategorías o códigos, esto se observa en la siguiente figura:

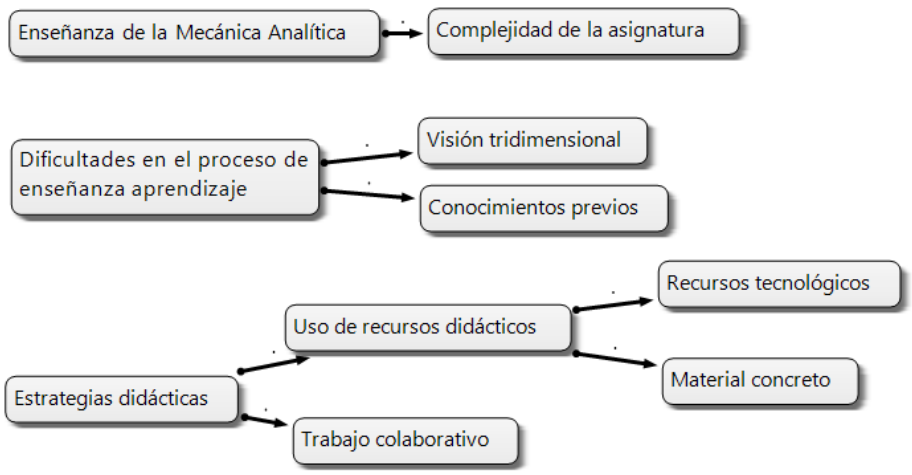


Figura 2.9. Categorías y códigos de las entrevistas

A continuación, se presenta un análisis e interpretación de cada una de las categorías seleccionadas:

Enseñanza de la Mecánica Analítica

"Desde un punto de vista la enseñanza de la Mecánica Analítica es muy complicada […] que abarca el comportamiento estático y dinámico que corresponde a la rama Física […] sin embargo el que sea abordado desde otros puntos de vista, propuesta de Lagrange, propuesta de D'alembert, de Routh, Hamilton, hace que se presente complejidad conceptual, estructural, matemática y a eso hay que sumarle la complejidad de los recursos". (A)

"Es una materia muy bonita y bastante interesante, pero que se desarrollaba en base únicamente a procesos matemáticos y obviamente con una visión tridimensional" (B)

Figura 2.10. Opiniones sobre "Enseñanza de la Mecánica Analítica"

De las citas textuales de la figura 2.10 podemos observar que los docentes consideran la Mecánica Analítica como interesante, aunque comentan también que es complicada presentando dificultades debido a la parte conceptual, estructural y matemática, además de los procesos y análisis con una visión tridimensional.

Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje

Docente A

"Preparación previa de los estudiantes, tanto en el ámbito matemático como en el ámbito físico, […] dificultad en la parte propia de la asignatura […] se requiere recursos que faciliten la enseñanza por parte de maestro y el aprendizaje por parte del estudiante"

"Traducción de un diseño o de una foto que aparece en el libro […] interpretar un diagrama bidimensional, tratando de entender cómo es realmente el objeto o cuerpo tridimensional"

Docente B

"Tener una visión tridimensional, si, normalmente la explicación es únicamente a nivel del plano, a nivel de superficie pero que se tiene que proyectar a las tres dimensiones"

"Traslado de ciertos sistemas de coordenadas a otros sistemas de coordenadas, por ejemplo los estudiantes están muy acostumbrados únicamente a utilizar el sistema cartesiano y luego cuando se quiere transformar o cambiar a un sistema cilíndrico o esférico"

Figura 2.11. Opiniones sobre "Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje"

Las dificultades que los docentes comentan haber tenido al momento de impartir clases se relacionan con los conocimientos previos de los estudiantes tanto en Matemáticas como en Física; la interpretación de un diagrama bidimensional, es decir, las imágenes de los

problemas que representan sistemas tridimensionales, y la transformación de sistemas de coordenadas.

Estrategias didácticas.

Docente A

"La complejidad de la asignatura nos obliga a los maestros a utilizar […] el sistema tradicional, es decir, lo que es la enseñanza guiada […] además de las explicaciones, de las ejemplificaciones el uso de los recursos didácticos disponibles"

Material concreto:

"Brinda mayor conceptualización y visualización tridimensional del fenómeno"

Recursos tecnológicos

"*Existen programas colosales […] con la ventaja de que el estudiante lo puede repetir a su antojo, detener en cualquier instante, hacer observaciones puntuales****"***

Guía didáctica

"*Me facilitarían en definitiva la enseñanza, entonces tal material me va a servir para tal o tales temas, me recomiendan utilizarlos de tal forma en las explicaciones, de tal otra forma en las ejemplificaciones y de tal otra manera en la aplicación a problemas…****"***

Trabajo colaborativo

"*La Mecánica Analítica […] requiere de una gran cantidad de recursos, complementando a la explicación viene lo que yo siempre he llamado el trabajo grupal, grupos de 5 estudiantes como máximo****"***

Docente B

"Las estrategias que yo utilizaba eran, utilizar unos modelos de alambre para poder trabajar en tres dimensiones"

Material concreto:

"Yo utilizaba esas maquetas, los beneficios, bueno lo que yo le veía como positivo el manejo de las maquetas, era justamente el tener la visión tridimensional"

Recursos tecnológicos

Transformaciones o en la visualización de las tres dimensiones"

Guía didáctica

"Una guía didáctica para consulta del profesor, […] el desarrollo se lo hacía ya en clase, porque realmente la explicación que se realiza a los estudiantes en vivo y paso a paso es importante, la guía didáctica tal vez para los desarrollos como apoyo para el profesor"

Figura 2.12. Opiniones sobre "Estrategias didácticas usadas por el docente"

En la figura 2.12 podemos observar las opiniones de los docentes sobre sus estrategias didácticas usadas para impartir clases; por una parte el docente A comenta que debido a la complejidad de la asignatura utiliza la enseñanza guiada, aunque también expresa que ha usado recursos didácticos al igual que el docente B. Con respecto al uso de recursos didácticos, ambos docentes resaltan su importancia, la cual básicamente radica en la mejora de la visualización tridimensional de los ejercicios o problemas planteados sobre sistemas dinámicos. Sobre la guía didáctica comentan que su valor se centra en una herramienta de consulta con recomendaciones para abordar los diversos temas, aunque la docente B señala que el análisis se hace en clases paso a paso. Finalmente se destaca la importancia del trabajo colaborativo debido a que los estudiantes pueden socializar y compartir puntos de vista, inquietudes, además de la retroalimentación mutua.

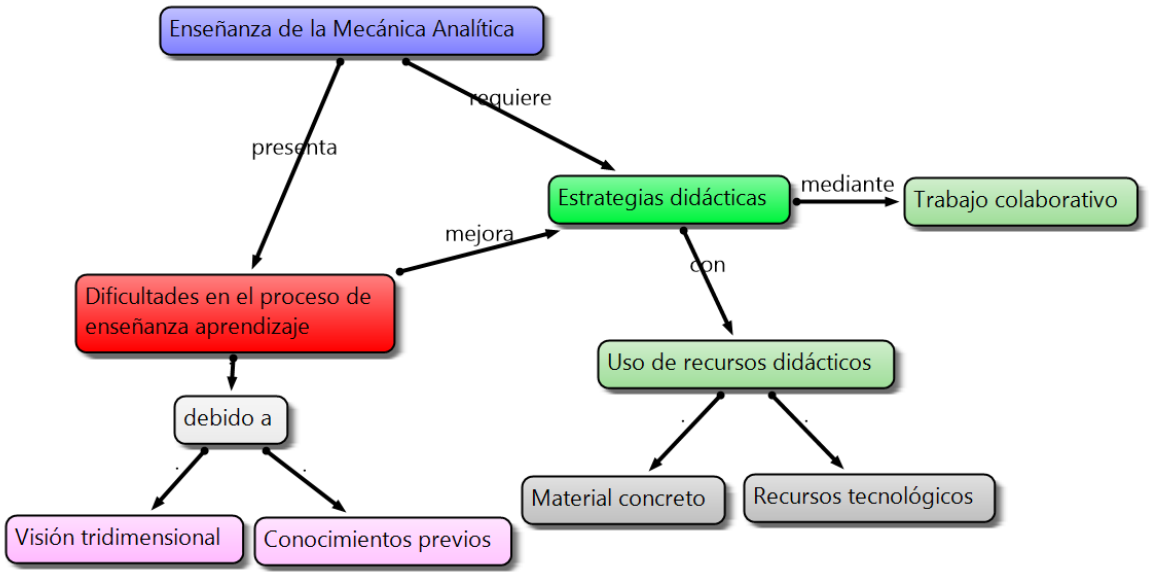


Figura 2.13. Relaciones entre categorías de las entrevistas

En la figura 2.13 se muestra las relaciones que existen entre las categorías que resultaron del análisis de las entrevistas, lo cual se resume en lo siguiente: La enseñanza de la Mecánica analítica presenta ciertas dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje debido a la visualización tridimensional, es decir, la interpretación de diagramas bidimensionales a sistemas tridimensionales, y también debido a los conocimientos previos que deben tener los estudiantes tanto en Matemáticas como en Física. Es por eso que surge la necesidad de usar estrategias didácticas por una parte mediante el trabajo colaborativo y por otra parte el uso de recursos didácticos ya sea material concreto o recursos tecnológicos.

2.5 Conclusión

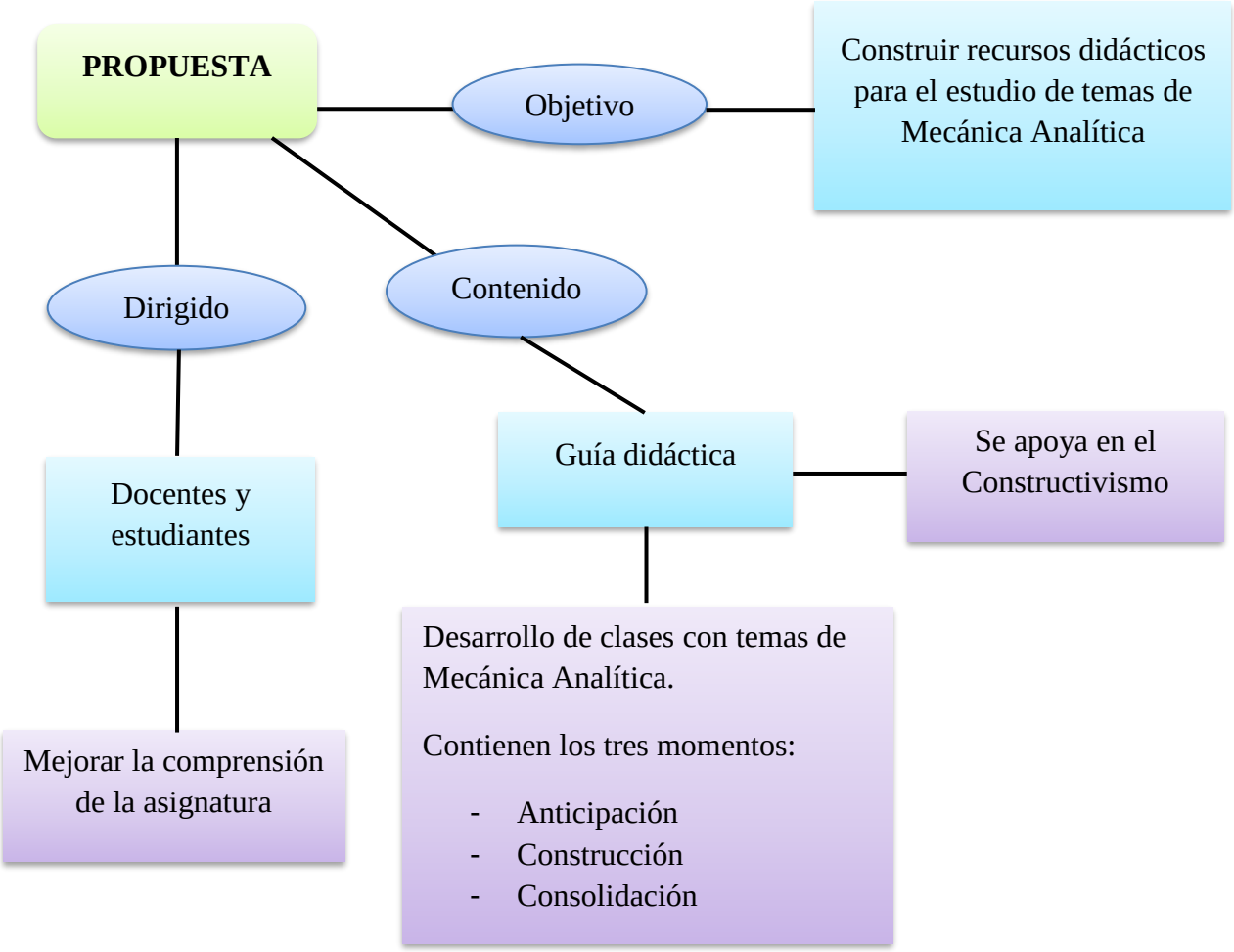
Luego de haber culminado con el análisis minucioso de los grupos focales y entrevistas, se observa que tanto los docentes como estudiantes concuerdan que existe cierta dificultad en el estudio de la Mecánica Analítica, debido a que los diagramas o imágenes no son suficientes para analizar y obtener toda la información sobre un sistema dinámico, lo cual lleva a un problema de visualización espacial o tridimensional, es decir, interpretar sistemas que se trasladan o rotan en el espacio, aunque también comentan la existencia de problemas de tipo conceptual en los conocimientos previos, contenidos tanto de Matemáticas como de Física. Otra coincidencia se encuentra en la importancia de los recursos didácticos, especialmente el material concreto, pues afirman que su uso mejoraría la compresión y visualización de los temas y problemas planteados. Finalmente el trabajo colaborativo muestra ciertas ventajas tales como: compartir ideas, solventar dudas, retroalimentación mutua sobre los diferentes contenidos estudiados…

Todos estos resultados corroboran la necesidad de construir material didáctico para abordar los diferentes temas de Mecánica Analítica.

CAPÍTULO III

PROPUESTA

3.1 Estructuración de la propuesta



Material didáctico para la enseñanza de Mecánica Analítica

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

TAMIA CONTENTO
OSCAR NIVELO

Clase 1

VELOCIDAD EN COORDENADAS GENERALIZADAS

¿Cómo determinaría la posición y velocidad del móvil que se encuentra sobre la montaña rusa de la figura? Claramente se puede observar que el móvil sigue una trayectoria curvilínea, cuya velocidad es la derivada de su vector posición respecto al tiempo. Por otra parte dentro de la Mecánica, especialmente en la Analítica, para determinar la posición de una partícula o cuerpo sólido se hace uso de un tipo de coordenadas denominadas generalizadas, las cuales consisten en la elección de ciertas magnitudes o parámetros que permitan describir completamente la configuración de un sistema, pudiendo mezclarse ángulos, longitudes, etc.

Fuente: http://anarchak.com/article/46399/0a1a8b44de51086-16

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:
Velocidad de una partícula en coordenadas generalizadas

Descripción			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Disco 1	Madera	Amarillo	1
Disco 2	Madera	Marrón	1
Ejes	Metal	Negro	2
Esfera	Plástico	Blanco	1

OBJETIVOS:

- Definir el concepto de velocidad y expresarlo en coordenadas generalizadas.
- Resolver problemas en base a lo aprendido con el apoyo de material concreto.

ANTICIPACIÓN

Se recomienda realizar las siguientes preguntas con el fin de activar los conocimientos que poseen los estudiantes.

Tenga en cuenta:
Relaciones entre coordenadas rectangulares y coordenadas polares, cilindrincas y esfericas son:
$x = R\,Cos\theta,\ y = R\,Sen\theta$
$x = r\,Cos\phi,\ y = r\,Sen\phi, z = z$
$x = r\,Sen\theta\,Cos\phi,\ y = r\,Sen\theta\,Sen\phi,\ z = r\,Cos\theta$

- ¿Para qué se usan los sistemas de coordenadas?
- ¿Qué tipo de sistemas de coordenadas conoce?
- ¿Cuáles son las ecuaciones de transformación que relacionan el sistema de coordenadas rectangular con el sistema esférico, cilíndrico y polar?
- Pida a los estudiantes que de forma individual determinen la posición de la partícula m, donde x_1, y_1 sean función de $x_2,\ y_2$. Luego socialicen las respuestas entre todos.

R: $x_1 = x_0 + x_2 Cos\theta - y_2 Sen\theta$

$y_1 = x_0 + x_2 Sen\theta + y_2 Cos\theta$

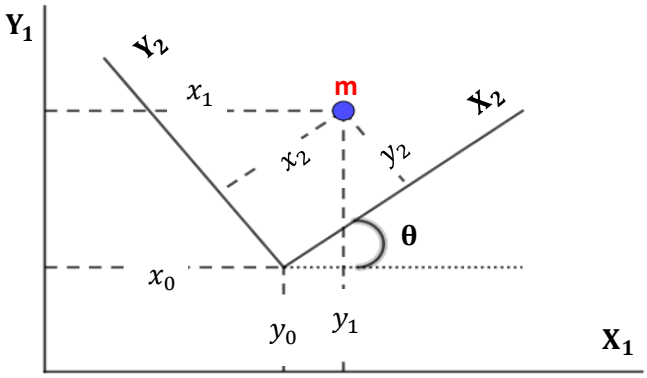


Figura 1.1
Autoría Propia

CONSTRUCCIÓN

Se sugiere realizar las siguientes actividades: primeramente defina el concepto de velocidad, luego dé una explicación sobre coordenadas generalizadas y finalmente usando material concreto los estudiantes determinarán la velocidad de la partícula de la figura 1.3.

1. Pregunta para el estudiante: ¿Cuál es la expresión para la velocidad de la partícula p de la figura 1.2 que se mueve una distancia Δs desde el punto A hasta el punto B?
2. Pida que el análisis lo realicen en su cuaderno de trabajo, luego socialice las respuestas para obtener el concepto de velocidad.

$$\text{velocidad} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}$$

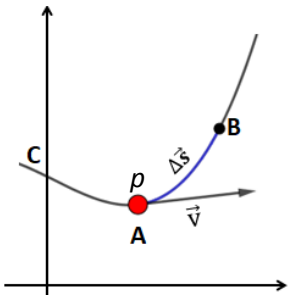


Figura 1.2
Fuente: Autoría Propia

La velocidad de una partícula que se desplaza sobre una curva cualquiera C que pasa por los puntos A y B, es el cociente entre el arco $\Delta\vec{s}$, que va desde A hasta B, y el intervalo de tiempo requerido Δt. Cuando Δt tiende a cero, B se aproxima a A.

La "notación de punto" de Newton, $\dot{\mathbf{s}}$, se usa para expresar la velocidad como la primera derivada de la posición respecto al tiempo, $\frac{ds}{dt}$

3. Explique que para determinar la configuración de un sistema conviene usar un tipo de coordenadas denominadas "coordenadas generalizadas". Por conveniencia se usa la letra q, además son de variada naturaleza lo que implica que no siempre tienen un significado físico. Por ejemplo: (x, y, z); (r, ϕ, z); (r, ϕ, θ) o de forma general $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$.

4. Actividad para el estudiante: Usando la "notación de punto" de Newton, determine la velocidad para una partícula libre, use las ecuaciones de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esféricas.

	Posición	Velocidad
Cilíndricas	$x = r\,Cos\phi,$	$\dot{x} =$.....
	$y = r\,Sen\phi,$	$\dot{y} =$.....

	$z = z$	$\dot{z} =$.....
Esféricas	$x = r\,Sen\theta\,Cos\phi,$	$\dot{x} =$.....
	$y = r\,Sen\theta\,Sen\phi,$	$\dot{y} =$.....
	$z = r\,Cos\theta$	$\dot{z} =$.....

5. Presente el material didáctico que se muestra en la figura 1.3, dé una descripción de la misma, luego plante el problema:

El material didáctico consta de dos discos giratorios: En el centro de D1, está fijo el origen del sistema X1, Y1. D2 se encuentra adherido en el contorno de D1, y en su centro está fijo el origen del sistema X2, Y2. Además una partícula *m* puede moverse libremente. (En este modelo, *m* se encuentra fijo en un determinado ángulo ϕ y radio R)

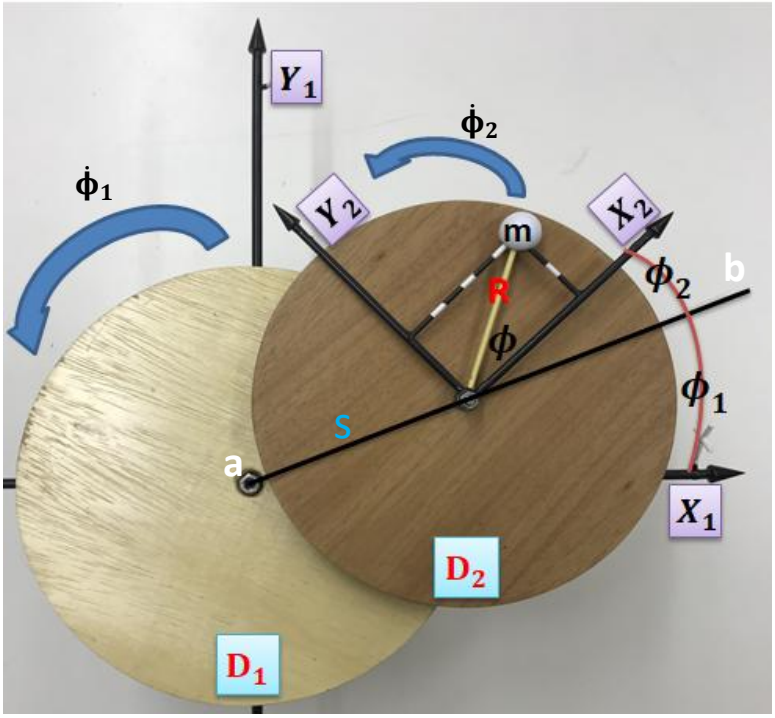


Figura 1.3
Fuente: Autoría Propia

Problema: La figura 1.3 muestra las plataformas giratorias D_1 y D_2. D_1 gira con respecto a la Tierra a una velocidad angular $\dot{\phi}_1$ mientras D_2 gira con velocidad angular $\dot{\phi}_2$ con respecto a D_1. Los ejes X_1 & Y_1 están fijos a la Tierra. Los ejes X_2 & Y_2 están fijos a D_2. La línea ab está adherida a D_1. Una partícula de masa m puede moverse libremente sobre D_2. Exprese la velocidad de la partícula con respecto a la Tierra en función de R, ϕ y otros.

6. Para dar solución al problema se sugiere que el estudiante lo haga de forma individual, sin embargo el docente deberá dar las orientaciones necesarias si el estudiante así lo requiere.

Indicaciones:

- Primeramente asegúrese que todos los estudiantes puedan visualizar y manipular directamente el material concreto, de tal forma que le sirva de provecho para analizar la situación dinámica del problema.
- Gire el disco D1 y D2 con diferentes velocidades angulares y muestre las variadas posiciones que puede tomar la partícula ***m,*** así como también los ángulos $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi_1}$, $\boldsymbol{\phi_2}$ y realice las siguientes preguntas:

  ¿Cómo determinaría la posición y velocidad de la partícula **m** que se encuentra sobre el disco D2?

  ¿Qué tipo de coordenadas conviene usar para determinar la posición y velocidad de la partícula m que se mueve sobre D2?

Solución del problema	
1) La posición de *m* con respecto a X2, Y2 usando coordenadas polares es: $\boldsymbol{x_2 = R\,Cos\phi}$; $\boldsymbol{y_2 = R\,Sen\,\phi}$ 2) Haciendo el cambio de variable: $\boldsymbol{\beta = \phi + \phi_1 + \phi_2}$ 3) En la figura 1.3 se puede observar que: $\boldsymbol{x_1 = sCos\phi_1 + R\,Cos\beta}$; $\boldsymbol{y_1 = sSen\phi_1 + RSen\beta}$	4) Derivando parcialmente x_1 & y_1, tomando en cuenta que **s** es constante y las variables R, ϕ_1 & β, tenemos: $\boldsymbol{\dot{x}_1 = -s\dot{\phi}_1\,Sen\phi_1 + Cos\beta - R\dot{\beta}\,Sen\beta}$ $\boldsymbol{\dot{y}_1 = s\dot{\phi}_1\,Cos\phi_1 + \dot{R}\,Sen\beta + R\dot{\beta}\,Cos\beta}$
5) Sabiendo que la velocidad de la partícula es $\boldsymbol{\dot{v} = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}$, obtenemos: Pero $\boldsymbol{\beta = \phi + \phi_1 + \phi_2}$ entonces $\boldsymbol{\beta - \phi_1 = \phi + \phi_2}$ Finalmente tenemos: $v^2 = s^2\dot{\phi}_1^2 + \dot{R}^2 + R^2\dot{\beta}^2 + 2s\dot{R}\dot{\phi}_1 Sen(\beta - \phi_1) + 2sR\dot{R}\dot{\phi}_1 Cos(\beta - \phi_1)$	

Marco teórico

La velocidad de una partícula, que se desplaza sobre una curva cualquiera C que pasa por los puntos A y B, es el cociente entre el arco $\Delta\vec{s}$, que va desde A hasta B, y el intervalo de tiempo requerido Δt. Cuando Δt tiende a cero, B se aproxima a A y, en el límite, la velocidad es:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{s}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}} \qquad (1.1)$$

cuya magnitud es:

$$\dot{s} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

La ecuación (1.1) nos indica que la partícula tiene una velocidad que es tangente en A a la trayectoria y, en general, a todos los puntos de la trayectoria. Puesto que Δs puede expresarse en cualquier sistema de coordenadas, también la ecuación (1.1) y su magnitud pueden expresarse en cualquier sistema. Así:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \qquad \text{en cartesianas}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta R)^2 + (R\Delta\phi)^2 + (\Delta z)^2} \qquad \text{en cilíndricas}$$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta r)^2 + (r\Delta\theta)^2 + (rSen\theta\Delta\phi)^2} \qquad \text{en esféricas}$$

y:

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad \text{en cartesianas}$$

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2} \qquad \text{en cilíndricas}$$

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2Sen^2\theta\dot{\phi}^2} \qquad \text{en esféricas}$$

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante

1. **Complete:**
   a) Las relaciones entre coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas son:

   …… …… ……

   …… …… ……..

   b) Investigue sobre sistemas inerciales y no inerciales, cite algunos ejemplos y finalmente identifique a qué sistemas corresponde el problema de la figura 1.3.

……

……

2) En su cuaderno de trabajo resuelva los siguientes problemas.

c) Determine la velocidad de la partícula de la figura 1.4 usando coordenadas adecuadas, la cual se mueve bajo la acción del resorte de constante *k* y la gravedad; considere el movimiento sobre el plano XY.

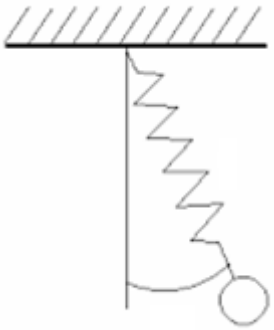


Figura 1.4
Fuente: Google

d) La figura 1.5 muestra un bloque que se desliza sobre el plano inclinado; considerando que se mueve sobre el plano XY, determine la velocidad.

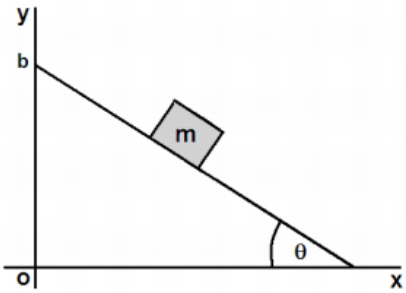


Figura 1.5
Fuente: Google

Clase 2

TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

El físico holandés CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695) estudió el comportamiento de los cuerpos durante las colisiones y llegó a establecer una relación entre la masa y el cuadrado de la velocidad ($m \cdot v^2$) que se mantenía constante antes y después de un choque perfectamente elástico. Esta cantidad se llamó más tarde "vis viva" (o fuerza viva) por el científico alemán GOTFFRIED LEIBNIZ (1646-1716) y está en el origen del concepto actual de energía asociada al movimiento o energía cinética.

Fuente: http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/Biografias/Huygens.htm

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

Modelo para Trabajo y Energía Cinética

Descripción modelo			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Disco	Madera	Marrón	1
Ejes	Metal	Negro	3
Esfera	Metal	Blanco	1
Letras	Metal	Blanco	3
Resorte	Plástico	Negro	1

OBJETIVOS:

- Conocer y explicar los conceptos de trabajo y energía cinética mediante la utilización de un simulador.
- Resolver las actividades propuestas con el apoyo del material concreto.

ANTICIPACIÓN

Para activar los conocimientos previos, se recomienda realizar las siguientes preguntas:

- ¿Qué nos indica la experiencia diaria, con respecto a la masa y la velocidad?
- ¿Qué concepto físico cree que está relacionado con el movimiento de los cuerpos?
- ¿Qué entiende por energía?
- ¿Qué relación tiene la energía con el trabajo?
- ¿Por qué cree que al reducir la masa de un objeto se pude mover a mayor velocidad?

Figura 2.1
Fuente: Google

CONSTRUCCIÓN

Para la construcción del conocimiento se recomienda realizar las siguientes actividades: explicar el concepto de trabajo y energía, y determinar la energía de una partícula usando el material concreto de la figura 2.3.

1. Para explicar el concepto de trabajo grafique la figura 2.2 en la pizarra. A continuación, Analice la expresión general de trabajo conjuntamente con los estudiantes.

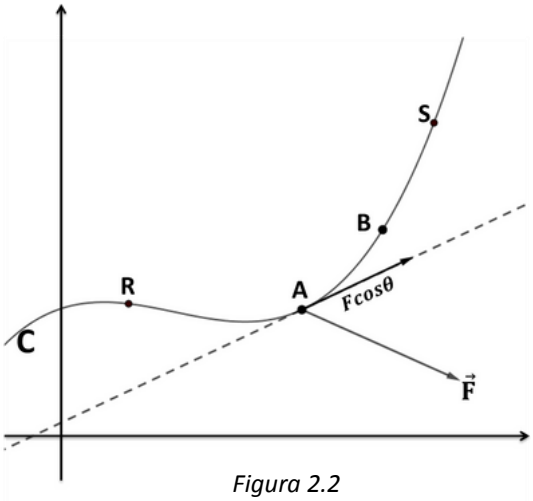


Figura 2.2
Fuente: Autoría Propia

Sugerencia: Partir de la expresión general de trabajo $W = F.d$, luego, apoyándose en la figura 2.2

a) Determine la expresión para un diferencial de trabajo dW movido por una fuerza F, cuya expresión es la siguiente:

$$dW = F_x dx + F_y dy \qquad \text{(a)}$$

b) Si se toma en cuenta el trabajo realizado sobre la trayectoria A a B, se tiene:

$$\boxed{W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy)} \qquad \text{(b)}$$

2. Para encontrar la expresión de la energía cinética utilice el simulador "PhET", el cual permite colocar un objeto (patinador) móvil sobre una trayectoria curva, permitiendo visualizar su cambio de posición y velocidad.

a) Demostración: use la segunda ley de Newton en la forma $F_x = m\ddot{x}$, además escribiendo $\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x}$, la expresión (b) en el espacio queda de la siguiente manera.

$$W = \int_A^B m(\dot{x}d\dot{x}+\dot{y}d\dot{y}+\dot{z}d\dot{z}) \qquad \text{(c)}$$

Integrando y evaluando entre los puntos A y B se obtiene:

$$W = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\Big]_A^B \Longrightarrow \qquad W = \frac{m}{2}(v_B^2 - v_A^2) \qquad \text{(d)}$$

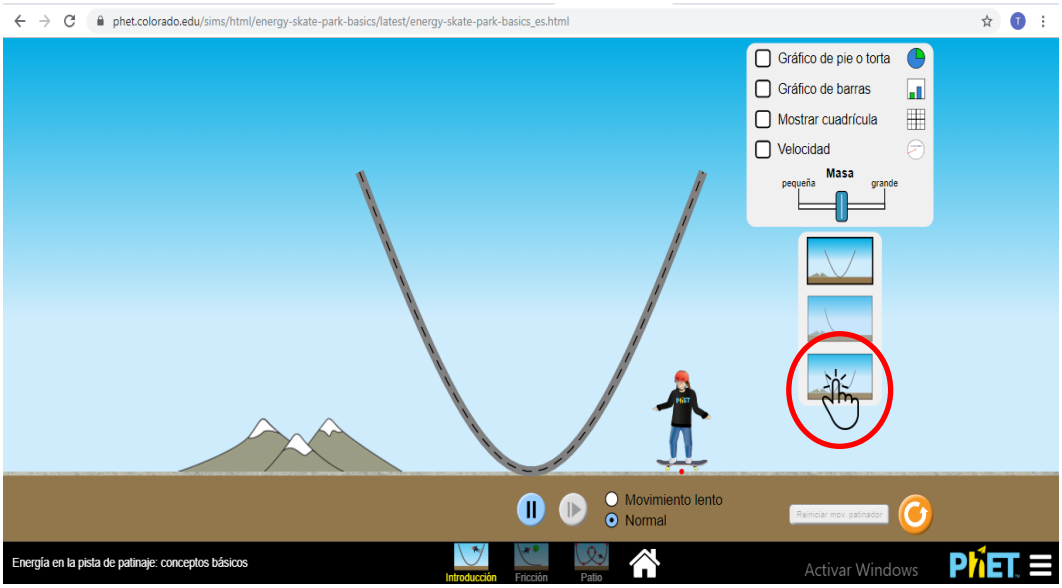
donde v_A, y v_B representan la velocidad en el punto A y en el punto B, respectivamente.

b) A continuación, proceda a formular la ecuación para la energía cinética.

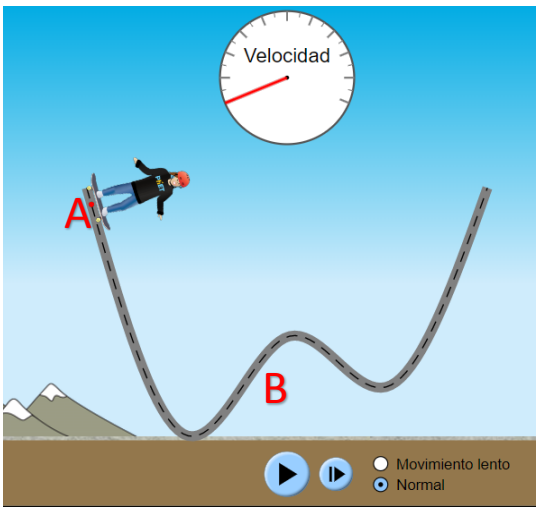
- Primeramente, acceda al simulador "PhET".

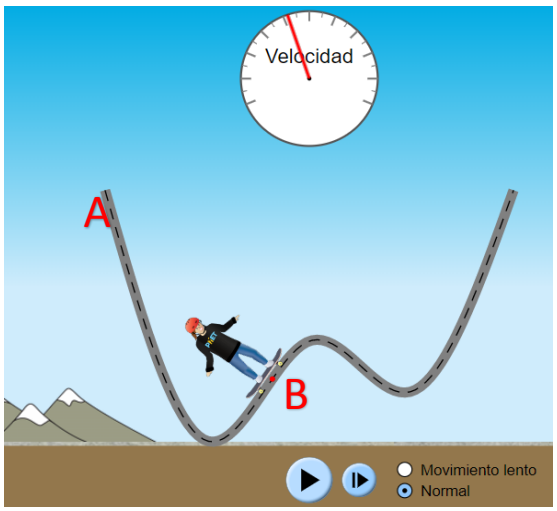
Link: https://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park-basics/latest/energy-skate-park-basics_es.html.

- Escoja la opción que se muestra en el círculo rojo.



- Proceda de la siguiente manera: coloque al patinador en la posición A, luego suéltelo y observe qué sucede con el velocímetro en la posición B.





- Luego de haber observado el cambio de posición del patinador, pedir a los estudiantes que determinen una expresión para la energía cinética, en base a lo observado y a la ecuación (d).
- Designe unos 5 min para que los estudiantes razonen y encuentren la expresión buscada.
- Sugerencia: dar las siguientes orientaciones si los estudiantes así lo requieren:

Sabiendo que $v_A = 0$ de la ecuación de la ecuación (d) concluimos:

$$W = \frac{m}{2} v_B^2 \qquad \text{(e)}$$

La ecuación (e) nos lleva a la siguiente definición de energía cinética:

Se denomina energía cinética de una partícula el trabajo requerido para incrementar su velocidad desde el reposo hasta cierto valor B, con respecto a un marco de referencia inercial. Entonces tenemos:

$$T = \frac{m}{2} v^2$$

Marco Teórico:

Si $\vec{F}$ es una fuerza que actúa sobre una partícula desplazándola de A a B de la figura 1 una cantidad ds, la diferencial de trabajo realizada por dicha fuerza es:

$$dW = FCos\theta ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

y el trabajo a lo largo de la curva C entre dos puntos R y S es:

$$\boxed{W = \int_{\underline{\ }}^{S} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)} \tag{2.1}$$

Las componentes de la fuerza $\vec{F}$ de la ecuación anterior son:

$$F_x = m\ddot{x} \ ; \ F_y = m\ddot{y} \ ; \ F_z = m\ddot{z}$$

Pero $\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x}$, $\ddot{y}dy = \dot{y}d\dot{y}$, $\ddot{z}dx = \dot{z}d\dot{z}$; por lo tanto la ecuación (1.7.1) puede escribirse en la forma:

$$W = \int_R^S \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int_R^S m(\dot{x}d\dot{x} + \dot{y}d\dot{y} + \dot{z}d\dot{z})$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\Big]_R^S$$

es decir:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m(v_S^2 - v_R^2)} \tag{2.2}$$

expresión que permite computar el trabajo necesario para cambiar la velocidad de la partícula desde v_R hasta v_S. Si en la ecuación anterior la velocidad inicial v_R es igual a cero, la ecuación es simplemente $W = \frac{1}{2} m v_S^2$, lo cual nos permite definir la energía cinética en la forma siguiente:

"Se llama energía cinética de una partícula el trabajo requerido para incrementar su velocidad desde cero hasta cierto valor v, con respecto a un marco de referencia inercial".

Matemáticamente tenemos:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2} \tag{2.3}$$

que para el caso de un sistema de N partículas es:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} m_i v_i^2} \tag{2.4}$$

y para un cuerpo rígido en rotación con velocidad angular $\dot{\theta}$, pero sin traslación es:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2} \tag{2.5}$$

donde $I = \int r^2 dm$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación.

Si en las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) el movimiento no iniciara desde cero, sino desde v_R y prosiguiera hasta v_S, los resultados obtenidos representarían la variación de la energía cinética que sufre la partícula, sistema de partículas o cuerpo rígido entre dichos dos extremos de velocidad, esto es:

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2} m (v_S^2 - v_R^2) \;\; ; \;\; \Delta T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (m_i v_S^2 - m_i v_R^2) \;\; ; \;\; \Delta T = \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}_S^2 - \dot{\theta}_R^2\right)} \tag{2.6}$$

CONSOLIDACIÓN

Hoja de trabajo para el estudiante

1. Haciendo uso del material didáctico determinar la energía cinética de la partícula de masa m de la figura 2.3.

El material concreto consta de un péndulo elástico sobre apoyo giratorio sobre el eje Z, colocado a una altura h. En la base está colocado un disco de radio R, de tal manera que R coincide con la distancia entre el eje Z y el punto de apoyo del péndulo.

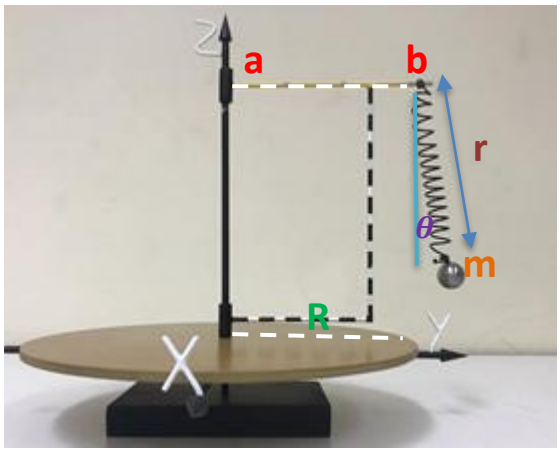


Figura 2.3
Fuente: Autoría Propia

Problema: Un péndulo elástico cuelga de un soporte ab que se mueve con velocidad angular constante. Si la masa se mueve en un plano vertical que forma un ángulo α con R, halle la expresión para la energía cinética del péndulo en función de r (longitud del resorte), θ (ángulo entre y la vertical), α y otros parámetros.

Sugerencia: Asegúrese que los estudiantes puedan manipular el material con el fin de que puedan analizar el funcionamiento del sistema.

- Recuerde que primero tiene que determinar la posición.
- Resolver teniendo en cuenta los conceptos aprendidos.

2. Halle la energía cinética del péndulo doble de la figura 2.4, en coordenadas polares, suponiendo cuerdas inextensibles.

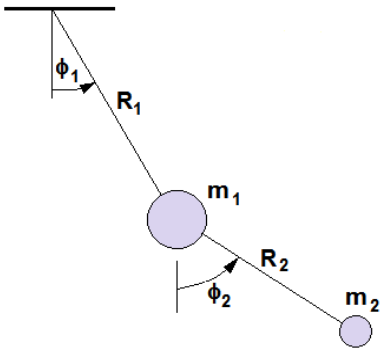


Figura 2.4
Fuente: Avecillas, A. (2018) Mecánica Analítica, Cuenca.

Péndulos de Foucault

En 1851 Leon Foucault, físico francés nacido en París en 1819, realiza uno de los experimentos más espectaculares de la historia de la Ciencia.

Como sabía que un péndulo tiene tendencia a mantener el plano de oscilación, aunque su punto de unión girase, comprendió que si ponía un gran péndulo en movimiento, éste mantendría su plano de oscilación mientras la Tierra giraba debajo de él.

En el Polo Norte la Tierra haría un giro completo debajo del péndulo en 24 horas. Igual ocurriría, pero en sentido contrario, si nos encontráramos en el Polo Sur. En el Ecuador no daría ningún giro (o podríamos considerar que tarda un tiempo infinito en dar una vuelta). En una latitud intermedia como la de París, la Tierra parecería girar más lentamente que en los polos.

El primer experimento no resultó muy convincente, pues el péndulo dejó de oscilar pronto y no se pudo sacar ninguna conclusión. En un segundo intento se le cedió la Sala Meridiana del Observatorio Astronómico de París, donde pudo comprobarse ciertamente el giro de la Tierra.

Sin embargo, fue el tercer experimento realizado en el Panteón de París y ante un gran público (entre el que se hallaba el emperador Napoleón III), el que le dio la fama a Foucault. Utilizó un hilo de acero de 67 metros de longitud y una esfera de plomo de 28 kilogramos de masa para construir el péndulo y consiguió que estuviese oscilando varias horas, durante las cuales se apreciaba claramente el giro de la Tierra.

Ésta fue la primera vez que se puso en evidencia de forma directa la rotación diaria de la Tierra, aunque ya se conociese de forma teórica.

Recuperado de: http://www.principia-malaga.com/p/images/pdf/pendulo.pdf

Clase 3

DESPLAZAMIENTO Y TRABAJO VIRTUALES

El Principio de los Trabajos Virtuales (P.T.V.) fue empleado por primera vez por Galileo (1564-1642) en el cálculo de mecanismos. Sin embargo fue enunciado de una forma más rigurosa por Lagrange (1736-1813), ya que este desarrolla la teoría variacional y sienta las bases de la "Mecánica Analítica".

Este principio también fue enunciado por Johann Bernouilli en el año 1717 de la siguiente manera: "Dado un cuerpo rígido mantenido en equilibrio por un sistema de fuerzas, el trabajo virtual efectuado por este sistema, durante un desplazamiento virtual, es nulo"

Fuente: http://www.elrincondelingeniero.com/el-principio-de-los-trabajos-virtuales/

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:
Desplazamiento y trabajo virtuales de una partícula.

Descripción			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Resorte	Acero	Negro	1
Alambre	Metal	Amarillo-Plateado	1
Ejes	Metal	Negro	2
Esfera	Plástico	Verde	1

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de desplazamiento y trabajo virtuales haciendo uso de material concreto.
- Resolver las actividades propuestas.

ANTICIPACIÓN

» Recuerde los conceptos de Ligaduras, Grados de Libertad y la expresión para el trabajo realizado por una fuerza.



Figura 3.1 *Figura 3.2* *Figura 3.3*
Fuente de imágenes: Google

» Proponga a sus estudiantes los ejemplos de las tres figuras y reflexionen sobre las posibilidades de moverse libremente que tienen: el tren (figura 3.1), el patinador sobre pista de hielo (Figura 3.2) y el patinador sobre la pista de concreto Figura (3.4). Pregunte el número de grados de libertad en cada caso.

» ¿Qué tipo de coordenadas conviene usar para determinar la posición del tren y los patinadores de las figuras anteriores? (Entre todos los estudiantes y docente se escogerán los más adecuados)

Recuerde que la ecuación para determinar los grados de libertad de un conjunto de N partículas en el espacio tridimensional es:

$$n = 3N - grados\ de\ restricción$$

CONSTRUCCIÓN

Para explicar el concepto de desplazamientos virtuales y la expresión del trabajo virtual, se recomienda hacer uso del material concreto que se muestra en la figura 3.4.

El modelo consta de un sistema XY. Una varilla lisa con eje de rotación en el origen del sistema. En la varilla lisa se encuentra ensartado una cuenta (esferita de plástico color verde) que puede desplazarse libremente. Además contiene ganchos donde se puede colocar un resorte

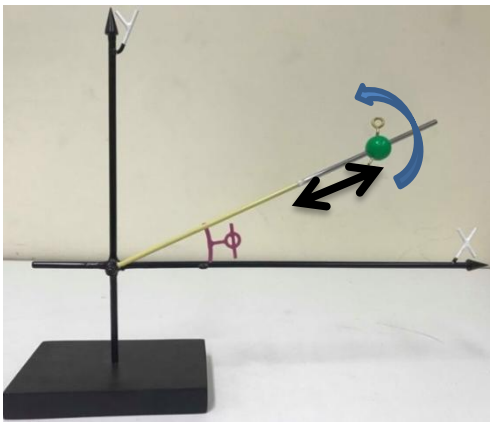


Figura 3.4
Fuente: Autoría Propia

PRIMERA PARTE (*Desplazamiento virtual*)

1. Deslize la partícula sobre la varilla y al mismo tiempo hágala girar en sentido antihorario sobre el plano XY.

   Preguntas para el estudiante: ¿Qué movimiento está permitido a la partícula? ¿Cuántos grados de libertad tiene la partícula? ¿Cómo expresaría un desplazamiento "real" para la partícula, m en un intervalo de tiempo *dt*?

   El desplazamiento "real" para la partícula se expresa mediante: $ds(dx, dy, dz)$

2. A continuación pida a los estudiantes pensar en desplazamientos arbitrarios realizados por la partícula, a raíz de esto explique los desplazamientos virtuales. (En el modelo de la Figura 3.4 un desplazamiento virtual podría ser aquel que se sale del plano XY)

   Desplazamiento virtual se considera al desplazamiento arbitrario infinitesimal cualquiera para una partícula y se expresa mediante: $\delta s(\delta x, \delta y, \delta z)$

SEGUNDA PARTE (*Trabajo virtual*)

3. Para esta demostración coloque un resorte, tal como se muestra en la figura 3.5.
4. Aplique una fuerza sobre la partícula y desplace un $\boldsymbol{\delta R}$ y $\boldsymbol{\delta\phi}$, luego pida a los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre la partícula.

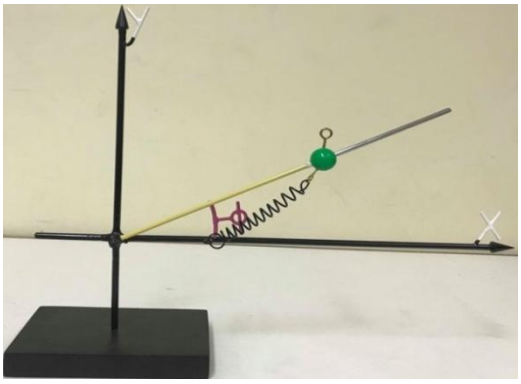


Figura 3.5
Fuente: Autoría Propia

5. Exponga tres tipos de desplazamientos para determinar el trabajo virtual en cada caso.

a) $\boldsymbol{\delta s}$ en cualquier dirección del espacio, ignorando la superficie aunque implique una distorsión de la restricción (elemento que impida el movimiento)

b) $\boldsymbol{\delta s}$ en cualquier dirección sobre una superficie móvil.

c) $\boldsymbol{\delta s}$ en cualquier dirección sobre la superficie, pero, ahora considerada como estacionaria (la varilla permanece constante, es decir no rota)

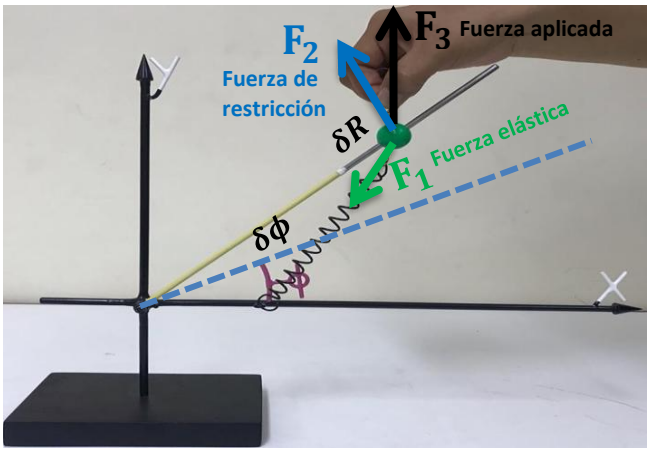


Figura 3.6
Autoría Propia

Tenga en cuenta:

*Se denominan **fuerzas de restricción** o "fuerzas de ligadura" aquellas que aparecen en tensiones de cuerdas inextensibles, bandas transportadoras, fuerzas de reacción de alambres lisos, varillas por el cual se puedan deslizarse masas, etc.*

6. Finalmente pida a los estudiantes determinar los desplazamientos virtuales realizados por la partícula en los tres tipos de desplazamientos antes expuestos, además de analizar las fuerzas que realizan trabajo. (Sugerencia: en caso de que los estudiantes requieran ayuda facilite la figura 3.7, con la finalidad de mejorar la comprensión)

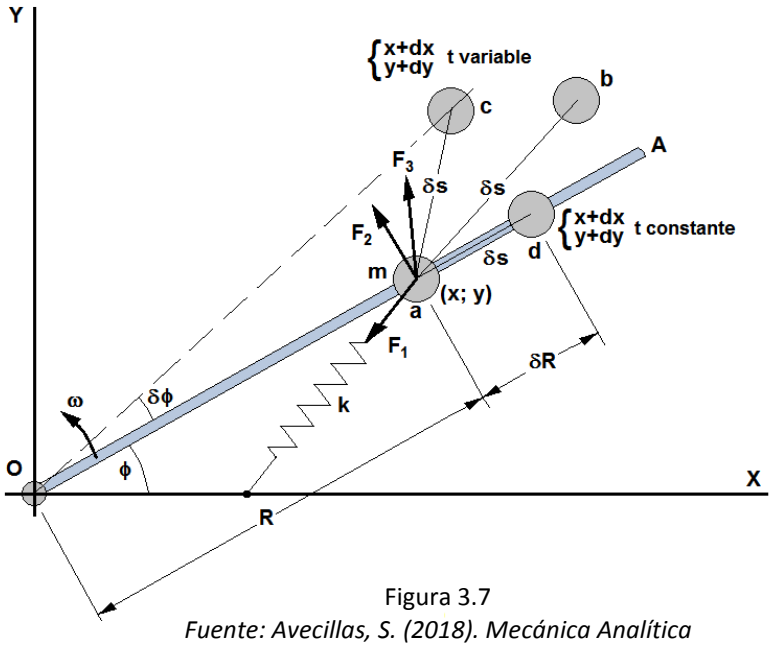


Figura 3.7
Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica Analítica

7. A continuación se muestra el análisis respectivo:

a) δs es totalmente arbitrario, como que no existiera la varilla. Las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ & $\vec{F}_3$ tienen componente sobre $\delta s = ab$ de modo que ***todas ellas realizan trabajo.***

b) La cuenta se mueve sobre la varilla rotatoria, de tal manera que $\delta s = ac$. Recordando que $x = RCos\omega t$ & $y = RSen\omega t$, se tiene que:

$\delta x = \delta RCos\omega t - R\omega Sen\omega t\delta t$ & $\delta y = \delta RSen\omega t + R\omega Cos\omega t\delta t$. Las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ & $\vec{F}_3$ tienen componente sobre $\delta s = ac$, de modo que ***todas ellas realizan trabajo.***

c) $\delta t = 0$, la varilla permanece estática y por ello la fuerza de restricción $\vec{F}_2$ no realiza trabajo. Las componentes de δs son: $\delta x = \delta RCos\omega t$ & $\delta y = \delta RSen\omega t$, tales que $\delta s = \delta R = ad$. Las fuerzas $\boldsymbol{\vec{F}_1}$ ***y*** $\boldsymbol{\vec{F}_3}$ ***tienen componentes sobre ad y por lo mismo realizan trabajo.***

Marco teórico.

Ambos conceptos son simplemente herramientas intermedias de apoyo para realizar desarrollos importantes, luego de los cuales desaparecen. Si una partícula de masa m está restringida a moverse sobre una superficie rugosa en movimiento, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$, lo hará describiendo alguna curva sobre la superficie y cierto desplazamiento ds en el espacio con respecto a un sistema inercial O. Este desplazamiento $ds(dx, dy, dz)$ es un "desplazamiento real". Pero podemos imaginarnos un "desplazamiento virtual", $\delta s(\delta x, \delta y, \delta z)$ que es arbitrario y que normalmente no coincide con ds. Al respecto hay tres posibilidades:

a) δs en cualquier dirección del espacio ignorando la superficie

b) δs en cualquier dirección sobre la superficie en movimiento

c) δs en cualquier dirección sobre la superficie considerada como estacionaria.

Para un desplazamiento virtual de cualquier tipo, el "trabajo virtual" realizado por $\vec{F}$ es:

$$\boxed{\delta W = F\delta s Cos(F, \delta s) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z} \tag{3.1}$$

que para un sistema de N partículas es:

$$\boxed{\delta W = \sum_{i}^{N} F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i} \tag{3.2}$$

La utilidad de la ecuación anterior radica en tres cuestiones:

a) Utilizando $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N, t)$, $y_i = y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N, t)$, $z_i = z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N, t)$, etc., se tiene $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\delta q_3 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3N}}\delta q_{3N}$, etc. En estos casos, δW contiene el trabajo hecho por las fuerzas de restricción.

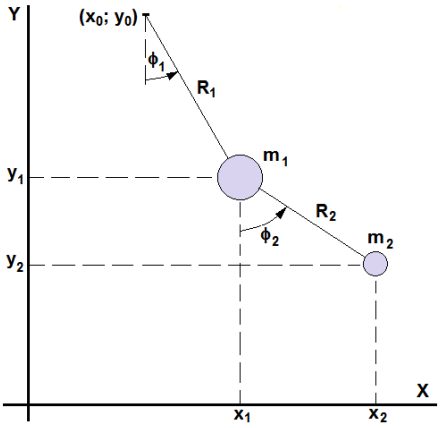
b) Utilizando $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\delta q_3 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial x_i}{\partial t}\delta t$, etc. También en estos casos, δW contiene el trabajo hecho por las fuerzas de restricción.

c) Utilizando $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\delta q_3 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n$, etc. En estos casos $\delta t = 0$ y el trabajo hecho por las fuerzas de restricción es cero.

Manteniendo constantes todas las coordenadas salvo una, por ejemplo q_r, el trabajo hecho por la variación de ella es:

$$\boxed{\delta W_{qr} = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_r} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_r} + F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)\delta q_r} \tag{3.3}$$

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante



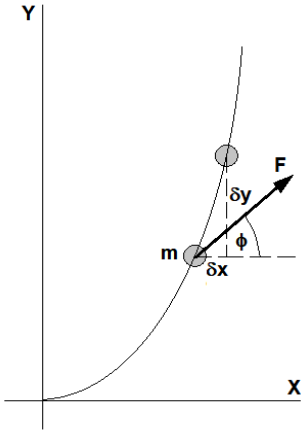


Figura 3.8 Figura 3.89

Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica Analítica

1. En su cuaderno de trabajo resuelva los siguientes problemas.

a. Halle el trabajo virtual asociado con variaciones de ϕ_1 & ϕ_2 del péndulo doble que se muestra en la figura 3.8, considerando sus cuerdas inextensibles.

b. Una partícula de masa m puede deslizarse ensartada en un alambre parabólico liso situado en un plano vertical, como se muestra en la figura 3.9, bajo la acción de una fuerza de magnitud constante, pero que cambia su dirección con velocidad angular constante $\dot{\phi}$. Determine la expresión para el trabajo virtual W asociado con la variación de la coordenada x.

Tarea para la siguiente clase

1. Pida a sus estudiantes revisar el video "MECÁNICA ANALÍTICA Y LAGRANGE" el cual contiene una explicación sobre la ecuación de Lagrange

Link: https://www.youtube.com/watch?v=7b3V7IlMgq8&t=357s

2. Además solicite a sus estudiantes revisar el documento "Ecuación de Lagrange. Introducción a las ecuaciones de Lagrange", el cual realiza una demostración sobre la ecuación de Lagrange.

Link: http://www.raulbarrachina.com.ar/otros/mecanica/apuntes/apunte016.pdf

Clase 4

FUERZAS GENERALIZADAS

MECÁNICA LAGRANGIANA: Mismos Principios (Galileo, Newton), distinta formulación, más sofisticada:

• Se prescinde de las fuerzas que actúan sobre las diferentes partes del sistema.

• Se prescinde de aquellas ecuaciones que sólo se refieren a las fuerzas de ligadura (tensiones, reacciones etc..) e involucra sólo las fuerzas que dan lugar al movimiento (Fuerzas activas)

• Se define una función escalar: Lagrangiana, de la que se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento, tantas como variables físicamente significativas.

•Esto permite escribir las ecuaciones de forma generalizada.

Fuente: http://ocw.uv.es/ciencias/2/1-2/112733mats50.pdf

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:
Modelo para Fuerzas Generalizadas

Descripción			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Esfera	Acero	Gris	1
Resorte	acero	Gris	1
Cuerda	Nailon	Blanco	1
Caja	Madera	Madera	1

OBJETIVOS:

- Explicar el concepto de fuerzas generalizadas mediante la utilización del material concreto.
- Aplicar el concepto de fuerzas generalizadas en resolución de ejercicios propuestos.

ANTICIPACIÓN

Antes de abordar el tema, socializar lo que han entendido del documento y del video que se envió la clase anterior, con la finalidad de que el docente aclare dudas.

Para ello realizar lo siguiente: se sugiere que escriba la ecuación de Lagrange en la pizarra, y conjuntamente con los estudiantes analice cada término de dicha ecuación, ya que esto se aplicará en la solución de problemas de temas posteriores.

Tenga en cuenta lo siguiente: Para una partícula que se mueve sobre una superficie se requiere de dos coordenadas generalizadas q_1 y q_2. Se obtienen dos escuaciones de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} = F_{q1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_2} = F_{q2}$$

La ecuación de Lagrange en su forma general es:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr}}$$

CONSTRUCCIÓN

Explique el significado físico de fuerzas generalizadas mediante material concreto, luego resuelva un problema para determinar las ecuaciones dinámicas del sistema.

1) Sugerencia: Realice la siguiente demostración.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr} \qquad \text{(a)}$$

a) De la ecuación de Lagrange (a), F_{qr} representa una fuerza generalizada, además la ecuación para un elemento de Trabajo es: $\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$ (esta servirá de base para aplicar más adelante).

b) Observe la figura 4.1, la cual muestra el movimiento de la partícula m que se encuentra restringida a moverse sobre una superficie, (para determinar su posición se puede utilizar coordenadas rectangulares (x, y); coordenadas polares (R, ϕ); o las coordenadas generalizadas (q_1, q_2)).

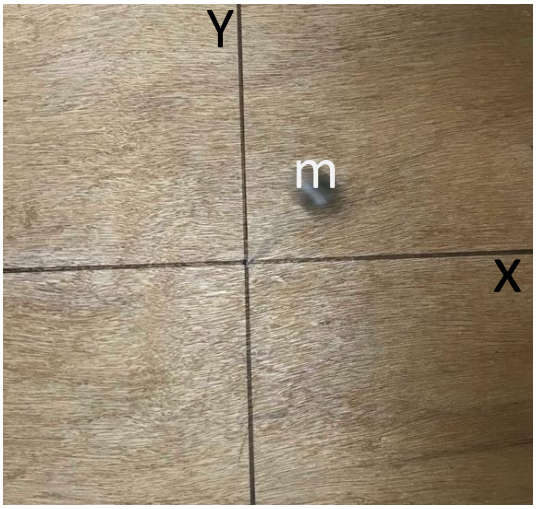


Figura 4.1
Autoría Propia

Recuerde: Por ejemplo, para una cuenta de masa m que se encuentra restringida a moverse sobre un alambre de forma parabólica, las ecuaciones de restricción son: $y = bx^2, \ z = 0$

Para la partícula de la figura 4.1 las ecuaciones de restriccion son:

$$x = x(q_1, q_2), \ y = y(q_1, q_2), \ z = z(q_1, q_2) \qquad \text{(b)}$$

Suponiendo un desplazamiento virtual δs, de componentes $\delta x, \delta y$ y δz y derivando las expresiones (b) (se debe variar q_1 mientras que q_2 se mantiene constante), se obtiene:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1, \ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1, \ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 \qquad \text{(d)}$$

Remplazando en la ecuación (d) en (b):

$$\delta W_{q_1} = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1}\right) \delta q_1$$

En conclusión: Una fuerza generalizada es una magnitud tal que el producto $F_{q_r} \delta q_r$ representa el trabajo realizado por fuerzas impulsoras, donde q_r varía una cantidad igual a $+\delta q_r$

Existen dos métodos para obtener las expresiones de las fuerzas generalizadas de un sistema.

A) Por sustitución directa F_x, F_y y F_z junto con $\frac{\partial x}{\partial q_r}, \frac{\partial y}{\partial q_r}, \frac{\partial z}{\partial q_r}$; para utilizar este método las fuerzas ya son conocidas por la naturaleza del sistema.

B) En este método a la coordenada q_r se debe incrementar una cantidad igual a $+\delta q_r$, mientras que las demás coordenadas que aparecen en T (energía cinética) permanecen constantes.

2) A continuación, utilice el material concreto de la figura 4.2, dé una descripción de la misma, plantee el problema y resuelva conjuntamente con los estudiantes.

El material didáctico consta de un tablero horizontal con un agujero en el centro, por el cual pasa una cuerda que une una esfera de hierro con un resorte, en la figura 4.2 se muestra la esfera en el origen del sistema XY y el resorte no está estirado.

Figura 4.2
Autoría Propia

Problema: La figura 4.2 muestra una partícula de masa m que puede moverse sobre una mesa horizontal lisa. Una cuerda está atada a m, pasa por un orificio y se une a un resorte. Cuando m está en el orificio, el resorte no está estirado. Halle: a) la energía cinética, b) las ecuaciones de Lagrange, c) las ecuaciones dinámicas del sistema.

3) Con el material didáctico realice la siguiente demostración. El objetivo es observar lo que ocurre al manipular la partícula m. Preceda de la siguiente manera.

- Distribuya adecuadamente a los estudiantes alrededor de la mesa de trabajo para que puedan observar el fenómeno dinámico.

- Hale la esfera un aproximado de 12 cm (se recomienda sobre el primer cuadrante)
- Impulse la esfera en la dirección que se muestra en la figura 4.3
- Pida a los estudiantes que observen la trayectoria que sigue la esfera.
- Repita las veces que sea necesario para que todos los estudiantes puedan observar el fenómeno.
- Describa lo observado en su cuaderno de trabajo.

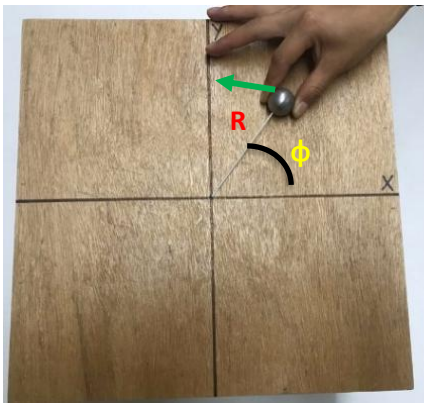


Figura 4.3
Autoría Propia

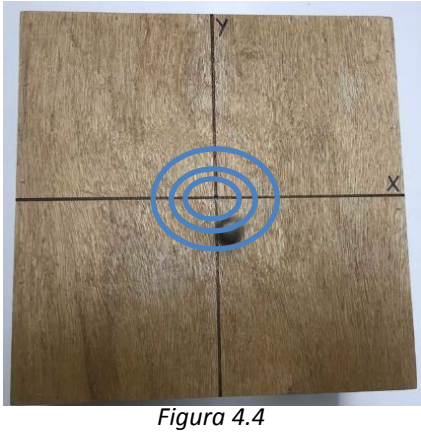


Figura 4.4
Autoría Propia

4) Luego de lo observado realizar el análisis matemático correspondiente.

El docente dará las orientaciones necesarias si el estudiante así lo requiere.

Solución del problema	
El sistema tiene dos grados de libertad, R & ϕ, entonces: a) $x = RCos\phi$, $y = RSen\phi$ $\dot{x} = \dot{R}Cos\phi - R\dot{\phi}Sen$, $\dot{y} = \dot{R}Sen\phi + R\dot{\phi}Cos\phi$ $\dot{x}^2 = \dot{R}^2Cos^2\phi + R^2\dot{\phi}^2Sen^2\phi - 2R\dot{R}\dot{\phi}Sen\phi Cos\phi$ $\dot{y}^2 = \dot{R}^2Sen^2\phi + R^2\dot{\phi}^2Cos^2\phi + 2R\dot{R}\dot{\phi}Sen\phi Cos\phi$ $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2$ $T = \frac{1}{2}mv^2$ $T = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2)$	b) La única fuerza que actúa sobre m es la del resorte, luego: $\delta W_R = F_R\delta R = -kR\delta R$ & $\delta W_\phi = F_\phi\delta\phi = 0$ de donde: $F_R = -kR$ & $F_\phi = 0$ por lo tanto: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}}\right) - \frac{\partial T}{\partial R} = -kR$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$

c) $\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} = m\dot{R}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}}\right) = m\ddot{R}$ $\frac{\partial T}{\partial R} = mR\dot{\phi}^2$ luego: $m\ddot{R} - mR\dot{\phi}^2 = -kR$	Similarmente: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = 2mR\dot{R}\dot{\phi} + mR^2\ddot{\phi}$ $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$ luego: $R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} = 0$
De haber utilizado coordenadas cartesianas habríamos obtenido: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\delta R = \frac{2x\delta x + 2y\delta y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\delta x + y\delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $R\delta R = x\delta x + y\delta y$ $\delta W = -kR\delta R = -k(x\delta x + y\delta y)$	de donde: $F_x = -kx \ \& \ F_y = -ky$ $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$; $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ luego: $m\ddot{x} = -kx \ \& \ m\ddot{y} = -ky$ que corresponde a un movimiento elíptico.

Marco teórico

La expresión:

$$\boxed{F_{qr} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r}}$$

es la componente importante de la ecuación que define el trabajo; esta expresión se denomina “fuerza generalizada”, la cual es una magnitud de tal naturaleza que el producto $F_{qr}\delta q_r$ representa el trabajo, en

julios, realizado por la fuerza impulsora cuando q_r varía en una cantidad $+\delta q_r$. En la práctica, F_{qr} puede ser una fuerza, un torque, una presión, etc.

Hay dos formas de determinar las expresiones de las fuerzas generalizadas:

1) Por sustitución directa de F_x, F_y, F_z, $\frac{\partial x}{\partial q_r}$, $\frac{\partial y}{\partial q_r}$, $\frac{\partial z}{\partial q_r}$ en la ecuación que define F_{qr}. Esto implica conocer las expresiones requeridas.

2) Por determinación de δW_{qr} realizado por las fuerzas impulsoras, manteniendo constantes todas las coordenadas q_r menos una; luego se establece la relación $\delta W_{qr} = F_{qr}\delta q_r$, de donde se toma la parte de δW_{qr} omitiendo δq_r, la cual representa la fuerza generalizada.

Una vez obtenidas las fuerzas generalizadas correspondientes a las diferentes coordenadas q_r, ya se puede utilizar la ecuación 2 para determinar las diferentes ecuaciones de Lagrange del sistema que se está analizando y de allí obtener las ecuaciones dinámicas correspondientes. Normalmente se logra llegar hasta este punto, debido a que las ecuaciones suelen ser tan complicadas que no es posible integrarlas y hay que acudir a soluciones gráficas y/o métodos numéricos.

Otro asunto importante es el siguiente: en las ecuaciones de Lagrange, el miembro izquierdo contiene todas las fuerzas inerciales (fuerzas del tipo masa por aceleración, tales como $m\ddot{x}$, $mR\dot{\phi}^2$, $2m\omega x$, …). En cambio, el miembro de la derecha contiene todas las fuerzas aplicadas o impulsoras.

Sabías que:

Newton afirmó que la fuerza gravitatoria, que es la que permite y explica el movimiento de los astros, es la misma que explica la caída de los objetos de la Tierra debido a la atracción que esta ejerce sobre ellos.

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante

1. **Realice una investigación sobre otras formas aparte de sistemas dinámicos, que pueden representar las fuerzas generalizadas:**

   ……

   ……

   ……..

2. **Resuelva los siguientes problemas:**

   a) Una cuenta de masa m puede deslizarse libremente a lo largo de un alambre parabólico cuya forma obedece a la ecuación $y = bx^2$, y que se encuentra en un plano vertical. Determine la energía cinética, la ecuación de Lagrange y la ecuación dinámica del sistema.

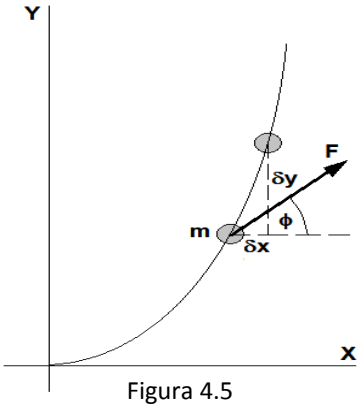


Figura 4.5

Fuente: Google

   b) El péndulo de la figura está sostenido por una banda elástica que obedece la ley de Hooke y se mueve en un plano vertical. Determine la energía cinética, las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones dinámicas del sistema.

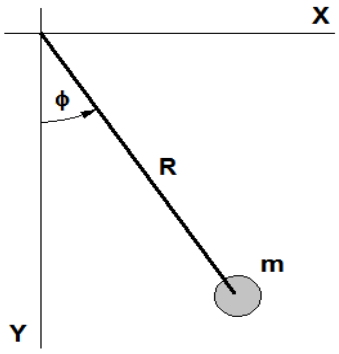


Figura 4.6

Fuente: Avecillas, A. (2018) *Mecánica Analítica,* Cuenca.

Clase 5

MARCOS Y RESTRICCIONES MÓVILES

El juego mecánico UFO tiene muchos otros nombres: Disco Mágico, Platillo Volador u Ovni Volador. Es uno de los juegos mecánicos más populares en parques de diversión. Pertenece a atracciones emocionantes. En cuanto a este equipo, hay seis componentes principales: pista, disco giratorio, escenario, piezas de decoración, dispositivo de seguridad y unidad de control electrónico. Dentro de este juego se encuentran muchos conceptos de Mecánica Analítica, se trata de un sistema dinámico con un disco que puede girar libremente y a su vez puede desplazarse sobre la riel que tiene forma parabólica.

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:
Movimiento bajo un marco y restricción móvil.

Descripción			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Disco	Madera	Marrón	1
Varilla	Metal	Gris	1
Ejes	Metal	Negro	3
Esfera	Plástico	Blanco	1

OBJETIVOS:

- Conocer el efecto que causan los marcos y/o restricciones móviles en el análisis de un sistema dinámico.
- Aplicar los conceptos aprendidos en las actividades propuestas en grupos de trabajo.

ANTICIPACIÓN

Proponga las siguientes imágenes con la finalidad de que el estudiante reconozca sistemas de referencia y restricciones móviles.

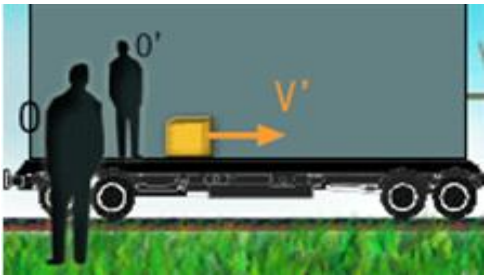


Figura 5.1

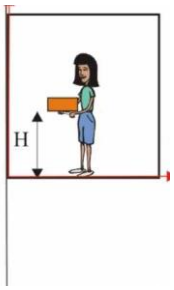


Figura 5.2

Fuente de imágenes: Google

» Suponga que el tren de la figura 5.1 está en movimiento y sobre uno de sus vagones se desplaza un bloque, además se tiene dos observadores uno dentro del vagón y el otro se encuentra en el exterior.

Identifique sistemas de referencia adecuados que permitan determinar la posición del bloque.

Cuáles son las limitaciones de movimiento que tiene el bloque.

» Realice un análisis similar para la figura 5.2 donde la mujer suelta un bloque sobre un ascensor en movimiento.

CONSTRUCCIÓN

Se recomienda realizar las siguientes actividades: plantear el ejemplo de la figura 5.3, luego demostrar que no alteran la estructura de las ecuaciones de Lagrange y resolver un problema relacionado con el tema usando material didáctico.

1. Sugerencia: Grafique en la pizarra el ejemplo de la figura 5.3.

a) Supóngase que el origen O se mueve con velocidad v, además los ejes X_2, Y_2 giran con velocidad angular ω.

b) Obsérvese que el sistema tiene un marco de referencia móvil X_2, Y_2, la partícula m puede moverse libremente sobre el plano, en consecuencia tiene coordenadas móviles.

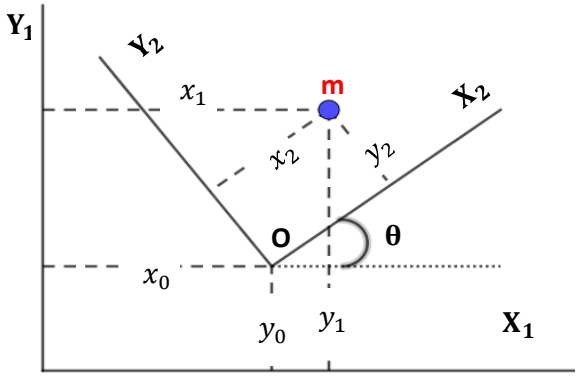


Figura 5.3
Fuente: Autoría Propia

c) Actividad para el estudiante: escribir las ecuaciones de transformación correspondientes. Deben expresar de la siguiente manera:

$$x_1 = v_x t + x_2 Cos\omega t - y_2 Sen\omega t$$

$$y_1 = v_y + x_2 Sen\omega t + y_2 Cos\omega t$$

Nótese que $x_1 = x_1(x_2,\ y_2, t)$ $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$

d) Demostración: Para determinar las ecuaciones de Lagrange de una partícula que se mueve sobre un superficie lisa, suponiendo un marco y restricción móvil.

- Partir de la ecuación de D' Alambert :

$$m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$$

donde $\delta x, \delta y, y\ \delta z$ representan desplazamientos virtuales y F_x, $F_y\ y\ F_z$ son las componentes de la fuerza total que actúa sobre la partícula. (Se supone el marco X, Y, Z inercial)

- Las ecuaciones de transformación que relacionan las coordenadas *x, y* & *z* con las coordenadas generalizadas q_1, q_2, y el tiempo t son:

$$x = x(q_1,\ q_2, t), y = y(q_1, q_2, t), z = z(q_1, q_2, t)$$

Las expresiones anteriores contienen explícitamente la restricción y el movimiento supuesto.

- Las expresiones para los desplazamientos son las siguientes:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2$$
$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2$$

Realizando ciertos procedimientos matemáticos se llegan a las ecuaciones de Lagrange: (Lo demostrará el estudiante)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_1} = F_{q1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_2} = F_{q2}$$

Conclusión: Los marcos de referencia móviles, las restricciones móviles o ambos, no alteran la forma general de las ecuaciones de Lagrange.

2. Para la siguiente actividad se recomienda hacer uso del material concreto de la figura 5.4 y mediante trabajo grupal resolver el problema propuesto:

a) Presente el material concreto y describa sus elementos.

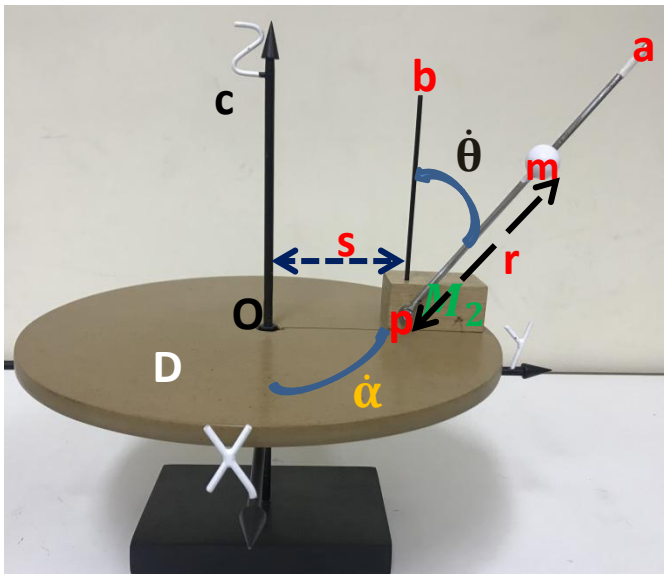


Figura 5.4
Fuente: Autoría Propia

El modelo consta de una plataforma giratoria, en la cual está adherida una pieza de madera que representa un motor, este propulsa una varilla que contiene una esfera de plástico que puede deslizarse libremente.

Problema: La plataforma D de la figura 5.3 gira con velocidad angular $\dot{\alpha}$. El motor M_2 propulsa a la varilla lisa "pa" con velocidad angular $\dot{\theta}$. La cuenta de masa m puede deslizarse libremente por acción de la gravedad. La varilla "pa" y las verticales "pb" &" Oc" son coplanares. Considere que α & θ son funciones conocidas del tiempo. Halle la ecuación dinámica del sistema.

b) Sugerencia: Forme grupos de 4 personas y deje a disposición de los estudiantes el material concreto.

Preguntas e indicaciones: (El estudiante lo hará en su cuaderno de trabajo)

- Cada grupo tendrá un aproximado de 5 minutos para manipular y visualizar el material concreto, de acuerdo a las condiciones del problema.
- El docente debe ser facilitador, mediador, animador durante la actividad, además de motivar para que los estudiantes se brinden apoyo unos a otros.
- ¿Cuántos sistemas o marcos de referencias se encuentran en el material concreto y cuáles de ellos están fijos y móviles?
- ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
- ¿Qué tipo de coordenadas conviene usar para determinar la posición de la partícula m?
- Hallar el valor de la energía cinética (T) del sistema
- Suponiendo que $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega_1}$, y la varilla "pa" oscila mediante el mecanismo $\boldsymbol{M_2}$, según $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_0 Sen \omega_2 t}$, ¿cuál es el nuevo valor de T?
- Aplique la ecuación de Lagrange a T.
- Encuentre las fuerzas generalizadas involucradas en el sistema.
- Finalmente compare su respuesta con la de sus compañeros.

R: $\ddot{r} + s\ddot{\alpha} Cos(\alpha+\theta) - s\dot{\alpha}^2 Sen(\alpha+\theta) - r\dot{\theta}^2 = -g Cos\,\theta$

Tenga en cuenta:

- ✓ El docente formará los grupos de trabajo de acuerdo a las necesidades y objetivos que se deseen alcanzar.
- ✓ Los grupos de trabajo pueden ser homogéneos (estudiantes con caracteristicas semejantes en cuanto a conocimientos, destrezas, habilidades, etc), y los grupos heterogéneos (algunos estudiantes poseen mayor conocimiento, habilidades o destrezas)
- ✓ Los estudiante con mayor conocimiento "expertos" deben ayudar a aquellos que tengan dificultades para comprender el problema.
- ✓ Los estudiantes deberán reflexionar, analizar y discutir los resultados y conclusiones obtenidas luego de resolver el problema.

Figura 5.5
Fuente: Google

Marco teórico

En la práctica son frecuentes las situaciones dinámicas en las que aparecen coordenadas móviles, restricciones móviles o ambas. Suponiendo una partícula que puede moverse sobre una superficie lisa y que ésta y las coordenadas son móviles, las ecuaciones de transformación que relacionan a x, y & z con q_1 & q_2 son:

$$x = x(q_1, q_2, t)\ ;\ \ y = y(q_1, q_2, t)\ ;\ \ z = z(q_1, q_2, t)$$

las cuales consideran explícitamente la restricción y el movimiento supuesto en función de t. Entonces las expresiones para los desplazamientos se convierten en:

$$\begin{cases} \delta x = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial x}{\partial t}\delta t \\ \delta y = \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial y}{\partial t}\delta t \\ \delta z = \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \dfrac{\partial z}{\partial t}\delta t \end{cases}$$

Sustituyendo éstas en la expresión $m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$, se llega a la ecuación de Lagrange. En consecuencia; *"los marcos de referencia móviles, las restricciones móviles o ambos, no alteran la forma general de las ecuaciones de Lagrange"*.

Con respecto a la energía cinética en presencia de restricciones móviles debemos recordar lo siguiente: *"la energía cinética debe calcularse siempre con respecto a un marco de referencia inercial, aunque esté expresada en función de coordenadas móviles"*.

Por otro lado, las fuerzas generalizadas se determinan suponiendo que el marco de referencia es inercial y que las restricciones son estáticas. En otras palabras, suponiendo que el marco y las restricciones se encuentran en reposo.

CONSOLIDACIÓN

Hoja de trabajo para el estudiante

1. **Marque verdadero (V) o falso (F)**

- La energía cinética debe calcularse siempre con respecto a un marco de referencia inercial, aunque esté expresada en función de coordenadas móviles. **( )**
- Se pueden determinar las fuerzas generalizadas suponiendo que el marco de referencia es no inercial y las restricciones son estáticas. **( )**
- Los marcos de referencia móviles, las restricciones móviles o ambos, no alteran la forma general de las ecuaciones de Lagrange. **( )**

2. **Investigue sobre ejemplos de sistemas dinámicos donde se encuentren marcos y restricciones móviles.**

……

……

……

……

3. **Resuelva el siguiente problema:**

La varilla lisa de la figura 5.4 gira con velocidad angular constante ω sobre el plano XY. La cuenta de masa m se desliza sobre la varilla bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$ que incluye la restricción. Halle las ecuaciones dinámicas del sistema.

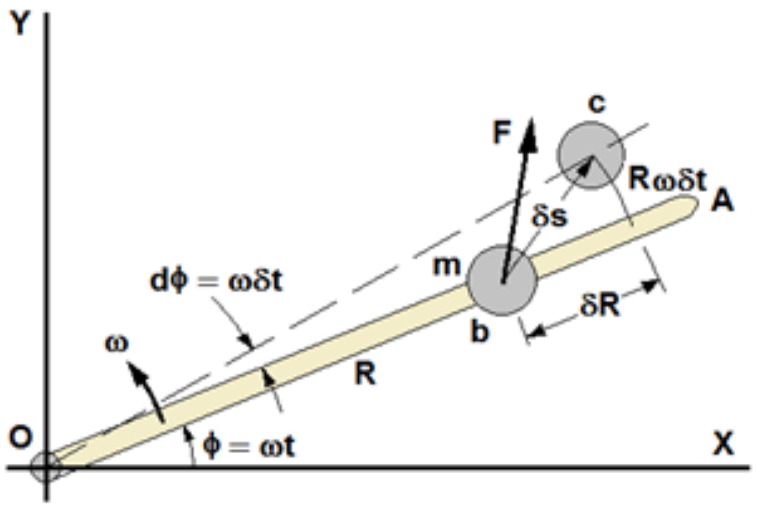
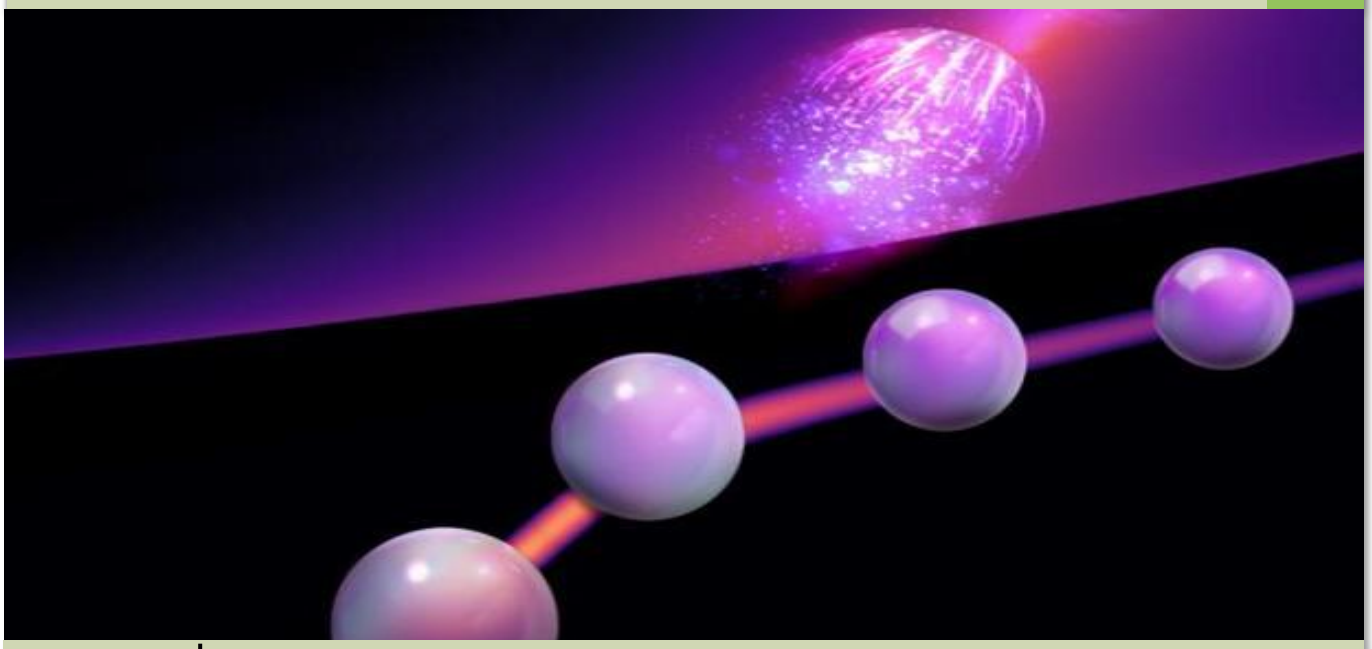


Figura 5.6

Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica

Clase 6

SISTEMAS DE PARTICULAS



En mecánica consideramos un sistema de partículas como un conjunto de *N* partículas que se mueven por separado, si bien interactúan entre sí y están sometidos a fuerzas externas. El número de partículas que forman un sistema puede ser muy variado e ir desde 2 (por ejemplo, al estudiar un átomo de hidrógeno), hasta cantidades gigantescas (por ejemplo, en 1 l de agua hay del orden de 10^{24} partículas). Cuando el número de partículas es reducido se puede abordar el problema dinámico analizando cada una por separado. Cuando es elevado, es preciso recurrir a promedios y descripciones colectivas (como la mecánica estadística, la elasticidad o la mecánica de fluidos)

Fuente: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Definici%C3%B3n_y_propiedades_de_un_sistema_de_part%C3%ADculas

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

1) Sistema de partículas acopladas mediante poleas.
2) Sistema de partículas acopladas mediante resortes.

Descripción del modelo 1			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Recuadro	Madera	Marrón	1
Poleas	Madera	Marrón	4
Masas	Metal	Gris	5
Cuerdas	Nailon	negro	4
Descripción del modelo 2			
Disco	Madera	Marrón	1
Esferas	Metal	Verde y amarillo	1
Resortes	Plástico	Negro	3
Tubo	Plástico	…….	1
Ejes	Metal	negro	3

OBJETIVOS:

- Analizar un sistema de partículas aplicando las ecuaciones de Lagrange.
- Aplicar los conceptos en la resolución de problemas propuestos con apoyo de material concreto y un simulador.

ANTICIPACIÓN

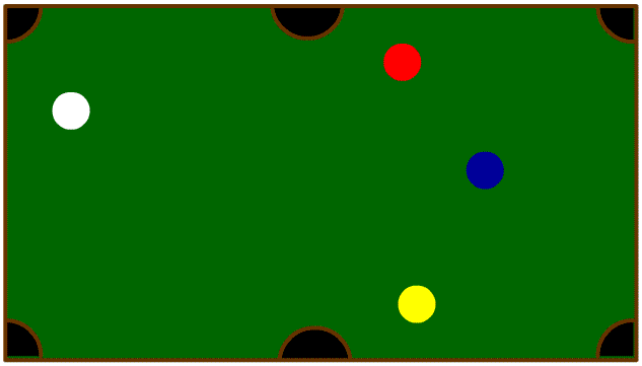


Figura 6.1 Sistema sobre una mesa de billar.
Recuperado de: http://dcomputo.blogspot.com/2015/08/flash-practica-mesa-de-billar.html

Proyecte el Gif insertando el link que se muestra en la figura 6.1, y realice algunas preguntas.

» ¿Qué entiende por un sistema de partículas?

» Considerando partículas a objetos pequeños como las bolas de billar, pida a los estudiantes dar más ejemplos de la vida real que se podrían consideran como un sistema de partículas

» ¿Qué maneras conoce sobre la forma de expresar las ecuaciones dinámicas de un sistema de partículas?

» ¿Será posible encontrar un conjunto de ecuaciones dinámicas que determinen la configuración de un sistema dinámico?

CONSTRUCIÓN

Se sugiere realizar las siguientes actividades aplicando las ecuaciones de Lagrange a los sistemas de partículas de los materiales concretos.

1. Las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas tiene la misma forma que para una sola partícula. (la demostración se deja a consideración del estudiante, ver el libro de Dare Wells "*dinámica de Lagrange*", p. 62,63,64)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr}$$

La diferencia está en la expresión para determinar las fuerzas generalizadas F_{qr}

$$F_{qr} = \sum_{i=1}^{p}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_r} + F_{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_r} + F_{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)$$

Tenga en cuenta: existen dos métodos para determinar las fuerzas generalizadas:

A) Por sustitución directa de la fuerza F_i de componentes rectangulares (F_{x_i}, F_{y_i} y F_{z_i}) que actúan sombre m_i, junto con las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial q_r}, \frac{\partial y_i}{\partial q_r}, \frac{\partial z_i}{\partial q_r}$ de las ecuaciones de restricción.

B) En este método, a la coordenada q_r se incrementa una cantidad igual a $+\delta q_r$ manteniendo las demás coordenadas que aparecen en T (energía cinética) constantes.

2. Presente y describa el material concreto de la figura 6.2, el cual permitirá visualizar y manipular los diferentes elementos para encontrar las ecuaciones dinámicas del sistema.

El material concreto consta de cuatro poleas, una fija y tres móviles, 5 masas de plomo, cuatro cuerdas inextensibles; las poleas móviles y las masas contienen un agujero, los cuales permiten mantener ciertas coordenadas constantes de acuerdo al análisis que se realice.

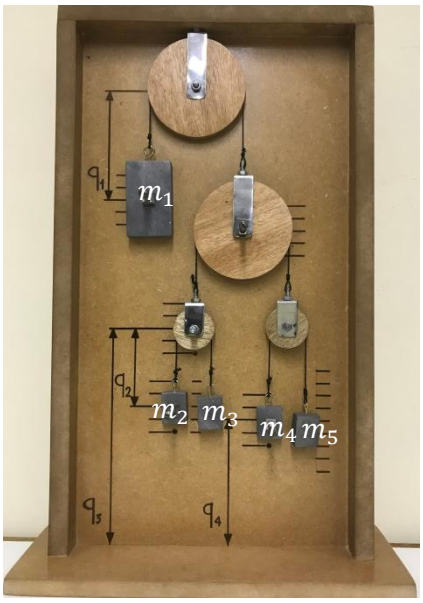


Figura 6.2
Autoría Propia

Problema: El sistema de la figura 6.2 consta de cinco masas m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5 (desprecie las masas de las poleas). Suponga solo movimiento vertical y tenga en cuenta las

fuerzas externas aplicadas (f_1, f_2, f_3 y f_4) a ciertos puntos para producir un desplazamiento $+\delta q_r$. Determine las ecuaciones dinámicas del sistema.

3. Para dar solución al problema se sugiere que el docente determine la fuerza generalizada F_{q_1}.

Procedimiento:

- Primeramente, determine la expresión para la energía cinética.

$$T = \frac{1}{2}[m_1\dot{q}_1^2 + (m_2 + m_3)(\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2 + (m_3 + m_2)(\dot{q}_3 - \dot{q}_2)^2 + (m_4 + m_5)\,\dot{q}_4^2]$$

- Aplique la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr}$$

- Desarrollando la ecuación de la energía se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1\dot{q}_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1\ddot{q}_1 \quad \& \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

- De lo anterior se tiene:

$$\boxed{m_1\ddot{q}_1 = F_{q_1}}$$

❖ Para encontrar la fuerza generalizada F_{q_1} utilice el material didáctico de la figura 6.3 y proceda de la siguiente manera:

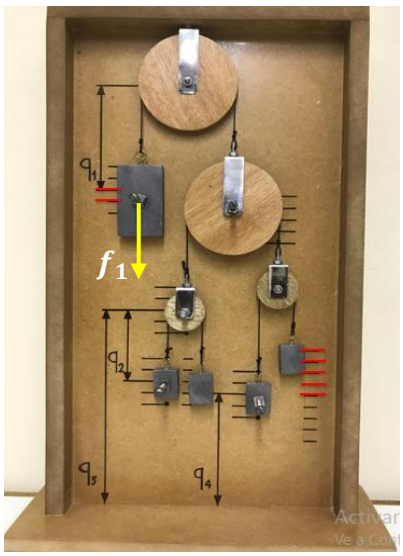


Figura 6.3
Autoría Propia

- Asegure las coordenadas q_2, q_3 y q_4 mediante un clavito de apoyo (inserte en los agujeros trazados en el tablero).
- Aplique una fuerza f_1, para desplazar + δq_1 (hacia abajo) y pida observar a los estudiantes lo que sucede con el sistema.

> En el material concreto se podrá observar cómo m_1 se desplaza una unidad hacia abajo, m_5 se desplaza 4 unidades hacia arriba.

- Determine el correspondiente elemento de trabajo:

$$\delta W_{q_1} = (m_1 g + f_1)\delta q_1 - 4(m_5 g + f_5)\delta q_1$$

- De donde:

$$F_{q1} = (m_1 g + f_1) \quad - 4(m_5 g + f_5)$$

- Por lo tanto la ecuación dinámica para la coordenada independiente q_1 es:

$$\boxed{m_1\ddot{q}_1 = (m_1 g + f_1) \quad - 4(m_5 g + f_5)}$$

4. Para la siguiente actividad se sugiere que el docente forme grupos de trabajo y a cada uno asigne encontrar $F_{q_2}, F_{q_3}, F_{q_4}$ con su respectiva ecuación dinámica.

Indicaciones:

- Forme grupos de 4 personas
- Cada grupo tendrá 4 minutos aproximadamente para manipular y analizar la ecuación dinámica correspondiente.
- Designe a cada grupo determinar la ecuación dinámica correspondiente a las coordenadas q_2, q_3 y q_4 (en caso de haber más de tres grupos distribuya las ecuaciones para todos los grupos).
- Para encontrar las ecuaciones dinámicas siga el procedimiento hecho para la coordenada q_1.

Grupo 1

En este caso se aplicará una fuerza f_2 para incrementar $+\delta q_2$ a q_2 hacia abajo, manteniendo contantes q_1, q_3 & q_4.

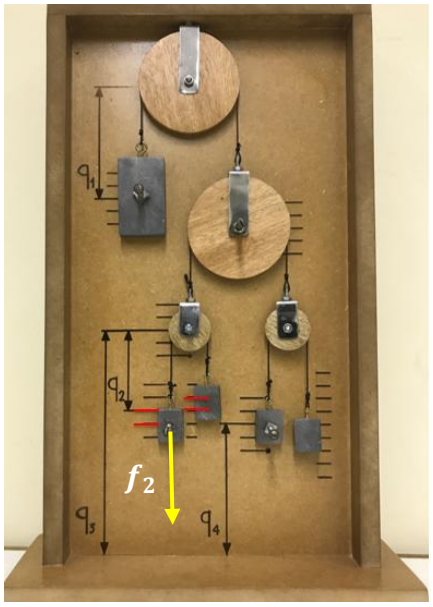


Figura 6.4
Autoría Propia

En el material didáctico se podrá observar como m_2 se desplaza una unidad hacia abajo, m_3 se desplaza una unidad hacia arriba.

$$(m_2 + m_3)(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_3) = (m_2 g + f_2) - (m_3 g + f_3)$$

Grupo 2

En este caso se aplicará una fuerza f_3 para incrementar $+\delta q_3$ a q_3 hacia abajo, manteniendo contantes q_1, q_2 & q_4.

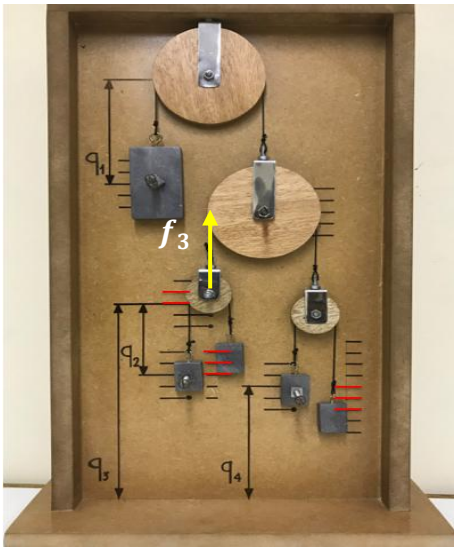


Figura 6.5
Autoría Propia

En el material didáctico se podrá observar cómo C_3 se desplaza una unidad hacia arriba, m_3 se desplaza 2 unidades hacia arriba y m_5 se desplaza 2 unidades hacia abajo.

$$(m_2 + m_3)(\ddot{q}_3 - \ddot{q}_2) = -(m_2 g + f_2) - (m_3 g + f_3) + 2(m_5 g + f_5)$$

Grupo 3

En este caso se aplicará una fuerza f_4 para incrementar $+\delta q_4$ a q_4 hacia abajo, manteniendo contantes q_1, q_2 & q_3.

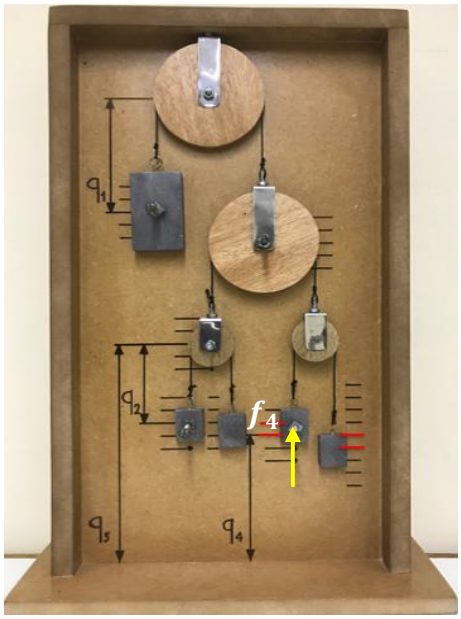


Figura 6.6
Autoría Propia

En el material didáctico se podrá observar cómo m_4 se desplaza una unidad hacia arriba, m_5 se desplaza una unidad hacia abajo.

$$(m_4 + m_5)\ddot{q}_4 = -(m_4 g + f_4) + (m_5 g + f_5)$$

Marco teórico

Supongamos un sistema de N partículas de masas m_i sometidas a las fuerzas F_i. Las ecuaciones de partícula libre de cada una de ellas son:

$$\begin{array}{lll} F_{x1} = m_1\ddot{x}_1 & ; & F_{y1} = m_1\ddot{y}_1 \;\; ; \;\; F_{z1} = m_1\ddot{z}_1 \\ F_{x2} = m_2\ddot{x}_2 & ; & F_{y2} = m_2\ddot{y}_2 \;\; ; \;\; F_{z2} = m_2\ddot{z}_2 \\ F_{x3} = m_3\ddot{x}_3 & ; & F_{y3} = m_3\ddot{y}_3 \;\; ; \;\; F_{z3} = m_3\ddot{z}_3 \\ \hline F_{xN} = m_N\ddot{x}_N & ; & F_{yN} = m_N\ddot{y}_N \;\; ; \;\; F_{zN} = m_N\ddot{z}_N \end{array}$$

Supongamos además que cada partícula sufre un desplazamiento virtual de componentes $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$; etc. Entonces, al realizar los productos adecuados se obtiene:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i\right)} \tag{6.1}$$

Ésta es la ecuación de D'Alembert, donde el miembro derecho representa el elemento de trabajo realizado por las fuerzas F_i al producir los desplazamientos δs_i, esto es:

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{N}\left(F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i\right)} \tag{6.2}$$

La ecuación de D'Alembert es el principio más general de la Dinámica clásica. Las ecuaciones del movimiento de cualquier sistema con n grados de libertad se obtienen de dicha ecuación, en cualquier sistema de coordenadas, usando las adecuadas ecuaciones de transformación y de restricción. De la expresión (6.1) se pueden obtener las ecuaciones de Lagrange, las de Hamilton, el principio de Hamilton, el principio de la mínima restricción de Gauss, etc.

Considerando que el sistema tiene n grados de libertad, $(n \leq 3N)$, y que las ecuaciones de transformación son:

$$\boxed{\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \end{cases}} \tag{a}$$

los desplazamientos serán:

$$\boxed{\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_n}\delta q_n \\ \delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_n}\delta q_n \end{cases}} \tag{b}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) en la ecuación de D'Alembert se llega finalmente a:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr}} \tag{6.3}$$

donde:

$$\boxed{F_{qr} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_r} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_r} + F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)} \tag{6.4}$$

de modo que la expresión de la ecuación de Lagrange para un sistema de partículas es idéntica que la correspondiente a la de una sola partícula.

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante

1. Resolver el siguiente problema, con la ayuda del material concreto de la figura 6.7

Problema: La figura 6.7 muestra un sistema de masas y resortes contenido dentro de un tubo sin fricción que forma un ángulo β con respecto a la plataforma giratoria. El plano vertical que pasa por el centro del tubo pasa también por el eje de rotación. El conjunto se mueve hacia arriba con aceleración a. Halle las ecuaciones dinámicas de m_1 & m_2 en función de q_1 & q_2.

El material concreto consta de un disco de madera que gira alrededor del eje Z, sobre el cual está colocado un sistema de dos partículas (esferitas) acopladas mediante resortes insertadas en un tubo plástico, que a su vez se encuentra apoyado sobre una base triangular con un ángulo β de madera.

Luego de haber descrito el material, pida a los estudiantes que resuelvan el problema de forma individual.

Asegúrese que todos los estudiantes puedan manipular el material concreto con el fin de que visualicen todo el funcionamiento dinámico del sistema.

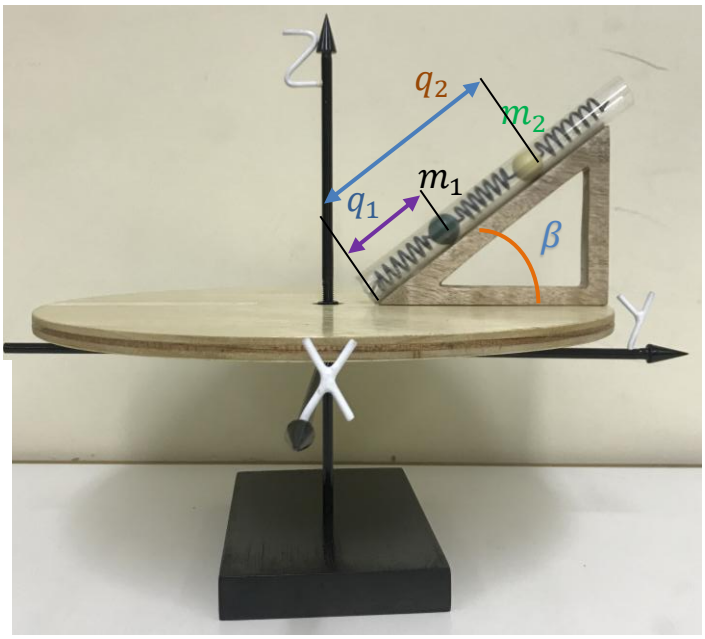


Figura 6.7
Autoría Propia

Para dar solución al problema tenga en cuenta las siguientes recomendaciones:

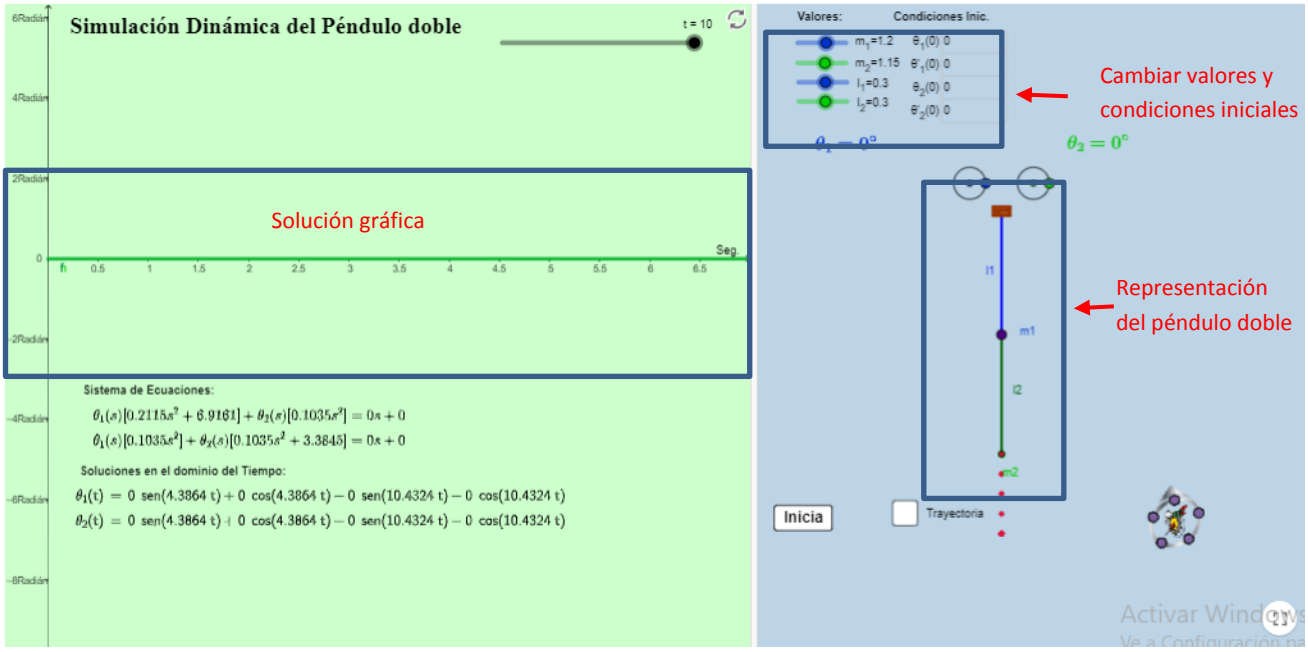
- Primeramente, escoja un sistema de coordenadas adecuado que permita determinar la posición de las partículas.
- Determine la energía cinética para las dos partículas.
- Aplique la ecuación de Lagrange.

2. Pida a los estudiantes determinar las ecuaciones dinámicas para un péndulo doble de cuerdas inextensibles. (Recuerde que en la consolidación de la clase 2 ya se determinó la expresión para la energía cinética). Las ecuaciones dinámicas para m_1y m_2 son las siguientes:

$$(m_1+m_2)R_1^2\ddot{\phi}_1+m_2R_1R_2\ddot{\phi}_2Cos(\phi_2-\phi_1)-m_2R_1R_2\dot{\phi}_2^2Sen(\phi_2-\phi_1) = -(m_1+m_2)gR_1Sen\phi_1$$

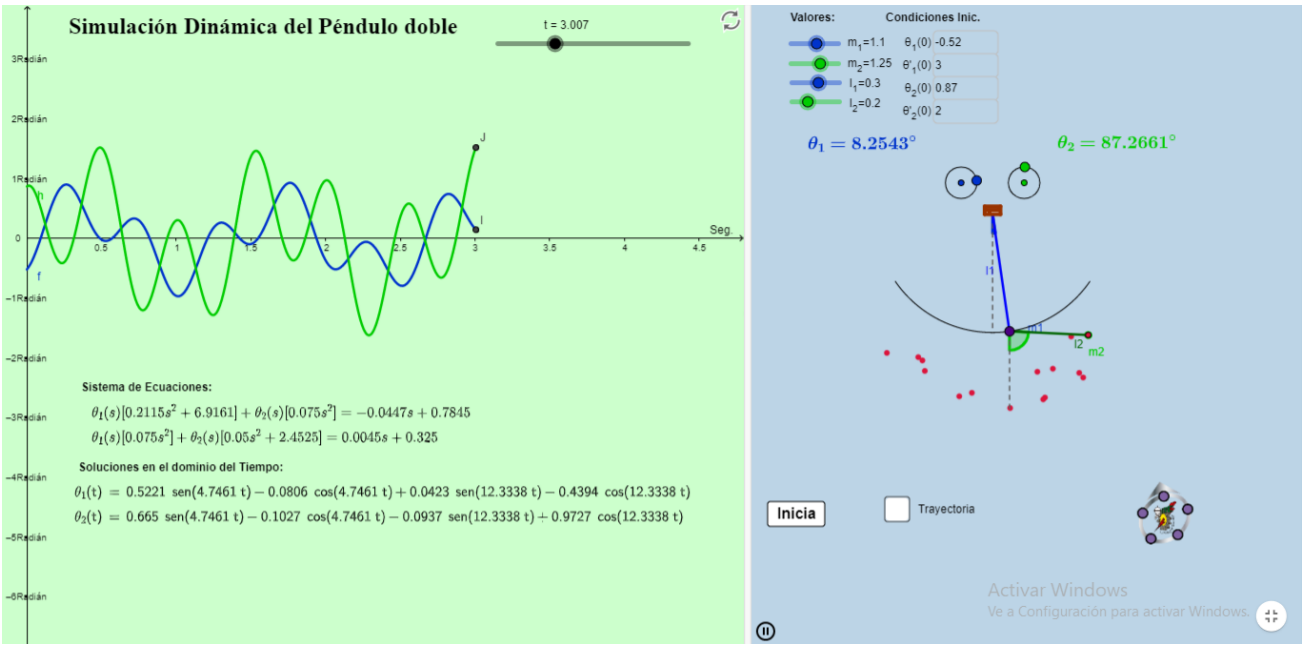
$$m_2R_2^2\ddot{\phi}_2+m_2R_1R_2\ddot{\phi}_1Cos(\phi_2-\phi_1)+m_2R_1R_2\dot{\phi}_1^2Sen(\phi_2-\phi_1) = -m_2gR_2Sen\phi_2$$

- Para obtener una solución gráfica de las ecuaciones dinámicas del péndulo doble, utilice el siguiente simulador. Link: https://www.geogebra.org/m/wfK5q7HP
- Se sugiere que el docente realice en clase una demostración de la forma como utilizar el simulador.
- Ingrese el link para acceder al simulador "GEOGEBRA", el cual permitirá obtener una solución gráfica, cambiando los valores de: m_1, m_2, l_1, l_2 y las condiciones iniciales: ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$ y $\dot{\phi}_2$.



- A modo de ejemplo ingrese los siguientes valores y condiciones iniciales.

$m_1 = 1.2$ kg; $m_2 = 1.7$ kg; $l_1 = 0.3$ m; $l_2 = 0.5$ m; $\phi_1 = -0.52$ rad; $\phi_2 = 0.87$ rad; $\dot{\phi}_1 = 1$rad/s; $\dot{\phi}_2 = 0.3$ rad/s



- Los estudiantes realizarán 3 simulaciones de tarea para entregar en la próxima clase, similares a lo que el docente realizó.

Clase 7

MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

Los dos cilindros son del mismo diámetro, de la misma altura y del mismo peso. Ambos tienen una masa adicional idéntica pero repartida de forma diferente: en uno está cerca del centro y en el otro está en la periferia. Este último cilindro tiene mayor resistencia a empezar a rodar, pues tiene mayor momento de inercia. El momento de inercia es para la rotación lo que la masa es para la traslación. Por eso, el cilindro de menor momento de inercia (el que tiene la masa más cerca del centro) se resiste menos a empezar a rodar y llega antes.

Fuente: http://www.principia-malaga.com/p/index.php/component/content/article/26-mecanica/271-cilindros-rodantes

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

1) Momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido.

2) Modelo para momentos y productos de inercia de un sistema de tres partículas.

Descripción modelo 1			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Cuerpo rígido	Metal	Celeste	1
Eje Oa	Metal	Rosado	1
Ejes	Metal	Negro	3
Esfera	Plástico	Verde	1
Descripción modelo 2			
m1	Hierro	Gris	1
m2	Hierro	Rosado	1
m3	Hierro	Celeste	
Ejes	Metal	Negro	3

OBJETIVOS:

- Determinar la expresión general del momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje cualquiera.
- Encontrar los momentos y productos de inercia para un sistema de partículas.

ANTICIPACIÓN

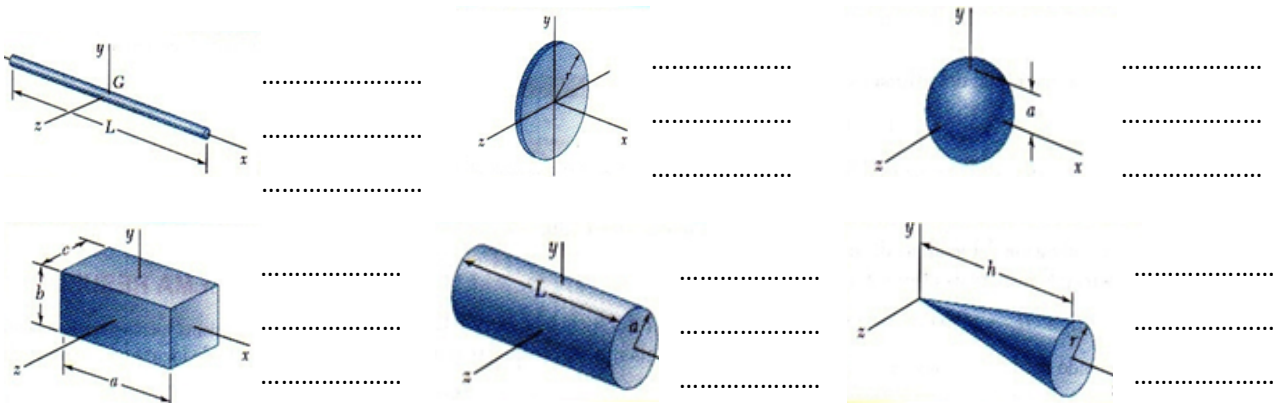
Para activar los conocimientos previos, se recomienda realizar las siguientes preguntas:

» ¿Qué entiende por cuerpo rígido?

» ¿Qué entiende por momento de inercia?

» ¿Qué métodos conoce para determinar el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a cualquier eje de rotación?

Anote las expresiones de los momentos de inercia de los siguientes cuerpos con respecto a los ejes x, y, z, luego socialicen las respuestas.



Fuente: http://experienciadinmicauv.blogspot.com/2010/11/momentos-de-inercia-de-masa.html

CONSTRUCCIÓN

Se recomienda realizar las siguientes actividades: con el apoyo del modelo 1 desarrollar la expresión para el momento de inercia de un cuerpo rígido y con el apoyo del modelo 2 encontrar los momentos y productos de inercia del sistema de 3 partículas.

1. Presente el material didáctico que se muestra en la figura 7.1 y describa sus elementos.

El modelo representa un cuerpo rígido, el punto O es el origen del sistema X, Y, Z, por el cual pasa el eje Oa y la esfera de plástico m' representa una partícula cualquiera del cuerpo, ubicada a una distancia r y una altura h.

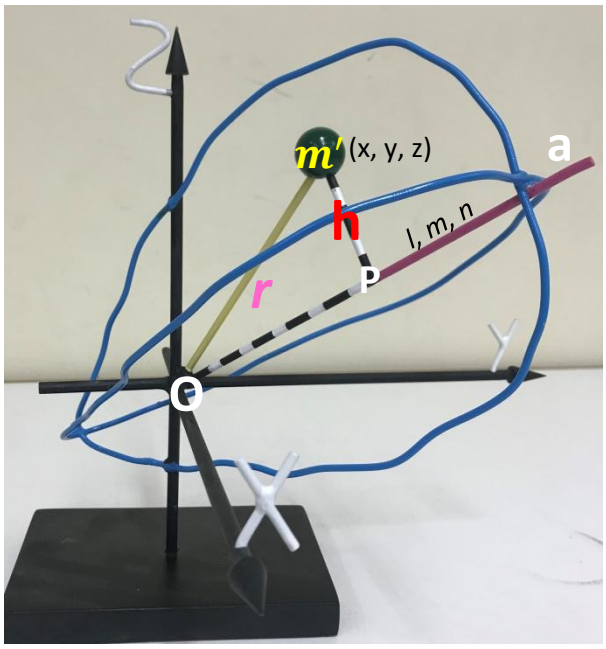


Figura 7.1
Autoría Propia

2. Pregunta para el estudiante: *¿Cómo desarrollaría la expresión para el momento de inercia del cuerpo rígido, con respecto al eje Oa?*

3. Debido a que se trata de un desarrollo de un teórico, se sugiere que el análisis respectivo lo realicen entre pares.

Indicaciones:

- Forme parejas, ya sea con igual características en habilidades destrezas o conocimientos o parejas con características diferentes; el docente lo decidirá de acuerdo a las necesidades y objetivos a lograr.
- Asigne unos 20 minutos, aproximadamente, para que las parejas realicen el análisis respectivo; además deje a disposición de los estudiantes el material concreto para que pueden visualizarlo y manipularlo y determinar las expresiones para los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido.
- Luego del tiempo asignado socialice las respuestas obtenidas por los estudiantes con el fin de obtener las expresiones correctas.
- El docente deberá vigilar que todos trabajen, además de despejar dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
- En caso de que los estudiantes tengan inconvenientes, el docente deberá realizar el análisis con su respectiva demostración.

Demostración: La ecuación para el momento de inercia se expresa de la siguiente manera:

$$\boxed{\boldsymbol{I_{Oa_1} = \sum m'h^2}} \qquad \text{(a)}$$

m' es la masa de una partícula cualquiera, h representa la distancia normal de la recta Oa hasta m', y la sumatoria incluye todas las partículas del cuerpo.

- Expresar h en función de *r* y $\overline{\mathrm{OP}}$.

  Use el teorema de Pitágoras, luego reemplace *r* en las coordenadas x, y, z y el segmento $\overline{\mathrm{OP}}$ con los cosenos directores (*l, m, n*) de la recta Oa.

$$h^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2 \qquad \text{(b)}$$

- Reemplazando (b) en (a) se tiene:

$$I_{Oa_1} = \sum m'(r^2 - \overline{OP}^2) = \sum m'[(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2]$$

- Realizando ciertos procesos matemáticos se obtiene: (lo demostrará el estudiante en su cuaderno de trabajo)

$$I_{Oa_1} = l^2 \sum m'(y^2{+}z^2) + m^2 \sum m'(x^2{+}z^2) + n^2 \sum m'(x^2{+}y^2) -$$
$$-2lm \sum m'xy - 2ln \sum m'xz - 2mn \sum m'yz$$

- La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$I_{Oa_1} = I_x l^2 + I_y m^2 + I_z n^2 - 2I_{xy} lm - 2I_{xz} ln - 2I_{yz} mn \qquad \text{(c)}$$

Dónde:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum m'\,(y^2{+}z^2) \\ I_y &= \sum m'(x^2{+}z^2) \\ I_z &= \sum m'(x^2{+}y^2) \end{aligned}\right\} \boxed{\text{Momentos de inercia con respecto a los ejes inerciales X, Y, Z}} \qquad \left.\begin{aligned} I_{xy} &= \sum m'xy \\ I_{xz} &= \sum m'xz \\ I_{yz} &= \sum m'yz \end{aligned}\right\} \boxed{\text{Productos de inercia}}$$

(d)

Tenga en cuenta:

Para cuerpos con masas continuas las sumatorias se reemplazan por integrales.

MARCO TEÓRICO

Para el estudio de los cuerpos rígidos y su dinámica es importante conocer previamente los conceptos de momentos y productos de inercia.

El momento de inercia del cuerpo rígido de la figura 7.2 con respecto al eje Oa_1, cuyos cosenos directores son l, m, n, es:

$$I_{Oa_1} = \sum m'h^2$$

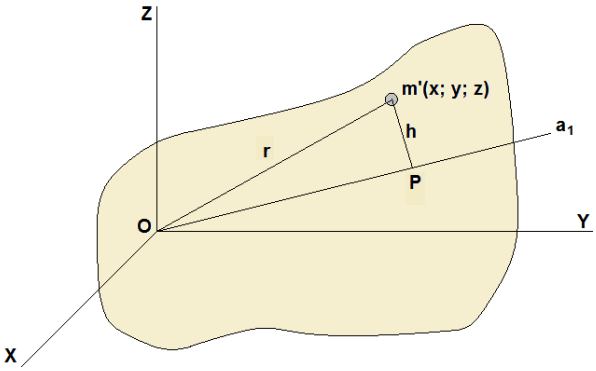


Figura 7.2
Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica Analítica

Pero:

$$h^2 = r^2 - OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2$$

$$h^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2$$

luego:

$$I_{Oa_1} = \sum m'[(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2]$$

que se convierte en:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{Oa_1} = l^2 \sum m'(y^2{+}z^2) + m^2 \sum m'(x^2{+}z^2) + n^2 \sum m'(x^2{+}y^2) - \\ -2lm \sum m'xy - 2ln \sum m'xz - 2mn \sum m'yz \end{aligned}} \qquad (7.1)$$

que puede escribirse en la forma:

$$\boxed{I_{Oa_1} = I_x l^2 + I_y m^2 + I_z n^2 - 2I_{xy} lm - 2I_{xz} ln - 2I_{yz} mn} \qquad (7.2)$$

Los términos I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes inerciales X, Y, Z, respectivamente. Los términos I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} son los productos de inercia con respecto a los mismos ejes.

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante

Actividad en grupo

1. Presente el material concreto de la figura 7.3 y dé una breve descripción de la misma.

   El material concreto consta de un sistema de tres partículas de diferente masa, colocadas mediante ciertas coordenadas sobre el sistema X, Y, Z.

2. Plantee el siguiente problema:

   La figura 7.3 muestra un sistema de tres partículas unidas a una varilla que coincide con el eje Z. Determine los momentos de inercia y los productos de inercia.

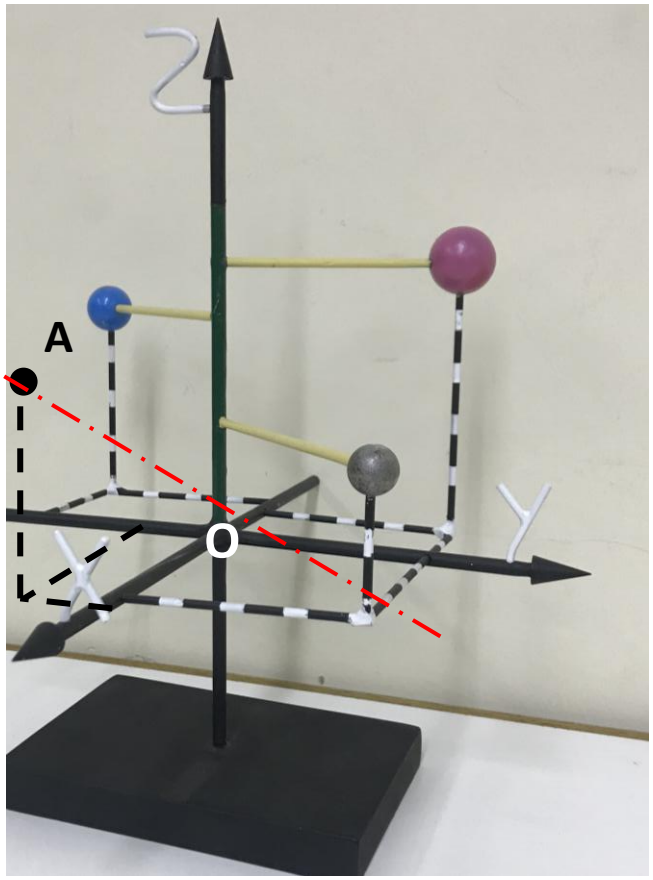


Figura 7.3
Fuente: Autoría Propia

Indicaciones:

- Forme grupos de 3 personas para que resuelvan el problema.
- Designe un aproximado de 5 min para que cada grupo mida las coordenadas de posición de m_1, m_2, m_3
- Las masas tienen un valor de:

  $m_1 = 0.25\ kg,\ \ m_2 = 0.75\ kg$ y $m_3 = 0.50\ kg$
- Finalmente, haciendo uso de las ecuaciones correspondientes encontrar, los momentos y productos de inercia del sistema.

2. En los mismos grupos de trabajo resolver los siguientes problemas:

a) Del ejercicio de la figura 7.3, determine el momento de inercia con respecto a la recta OA, donde A(4; -2; 5)

b) Encuentre el momento de inercia de la placa triangular homogénea de la figura 7.4 con respecto al eje OA, tal que A(9; 3)

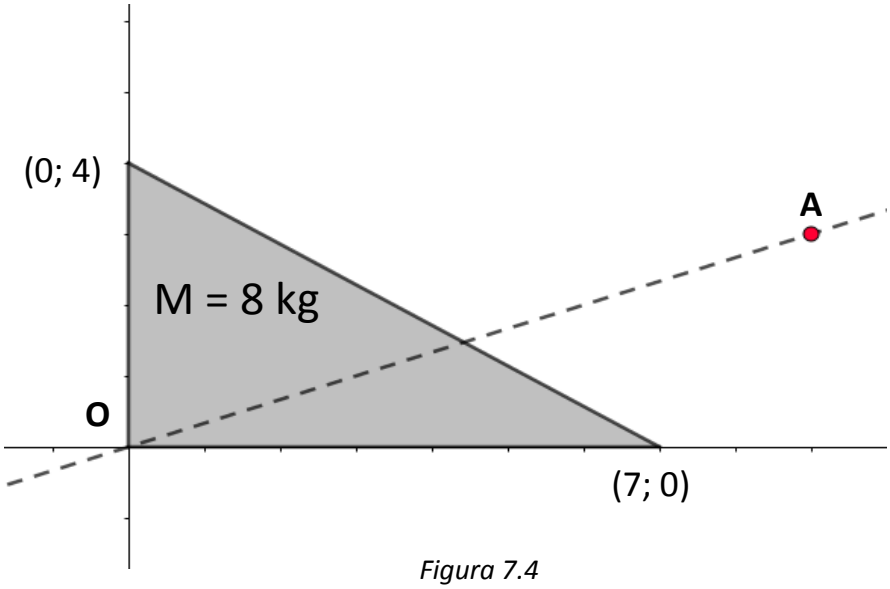
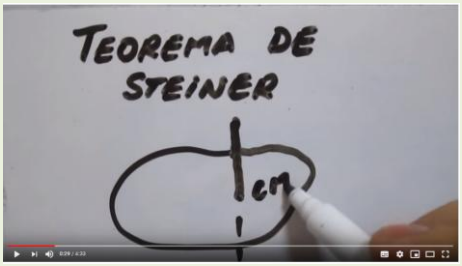


Figura 7.4
Fuente: Autoría Propia

Tarea para la siguiente clase

Revisar los siguientes contenidos:

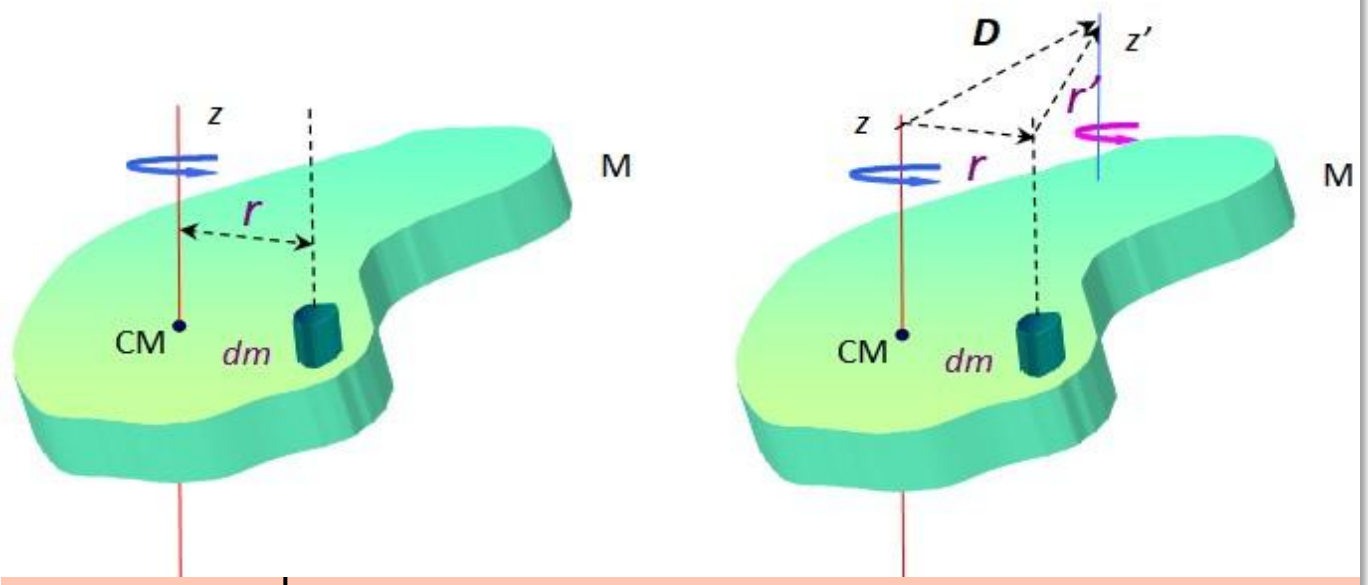
- Investigar los momentos de inercia con respecto al centro de masa de: *Varilla delgada de longitud L; un paralelepípedo macizo de lados a, b, c; un cilindro macizo de radio R y altura h; un disco circular de radio R; una esfera maciza de radio R; un cono macizo de radio R y altura h.*
- *Revisar el video en Youtube:* "Teorema de Steiner, Teorema de los ejes paralelos, explicación, ejemplo"



Link: https://www.youtube.com/watch?v=3U6wFCblxoE

Clase 8

MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA RESPECTO AL CENTRO DE MASA



El teorema de Steiner, también conocido como teorema de los ejes paralelos, permite evaluar el momento de inercia de un cuerpo extendido, alrededor de un eje que sea paralelo a otro que pase por el centro de masa del objeto.

Fue descubierto por el matemático suizo Jakob Steiner (1796 –1863) y afirma lo siguiente: sea Icm el momento de inercia del objeto respecto a un eje que pasa por su centro de masas CM e Iz el momento de inercia respecto a otro eje paralelo a este.

Fuente: https://www.lifeder.com/teorema-de-steiner/

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

1) Momentos y productos respecto al centro de masa.
2) Momentos y productos de un paralelepípedo con respecto al centro de masa.

Descripción modelo 1			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Cuerpo rígido	Metal	Celeste	1
Eje Oa	Metal	Rosado	1
Ejes	Metal	Negro	3
Esfera	Plástico	Verde	1
Descripción modelo 2			
m1	Hierro	Gris	1
m2	Hierro	Rosado	1
m3	Hierro	Celeste	
Ejes	Metal	Negro	3

OBJETIVOS

- Desarrollar las expresiones para los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido respecto al centro de masa.
- Resolver los problemas planteados

ANTICIPACIÓN

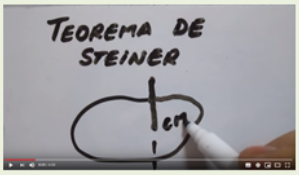
Para el desarrollo de esta clase los estudiantes debieron haber revisado en casa: Momentos de inercia con respecto al centro de masa de algunos sólidos y el Teorema de Steiner.

Realizar las siguientes preguntas en base a lo investigado por los estudiantes:

- Con sus palabras defina el centro de masa de un cuerpo rígido.
- Comprobar que los estudiantes hayan escrito correctamente las expresiones de los momentos de inercia con respecto al centro de masa de los sólidos.
- ¿Cuál es la expresión del " Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner"
- ¿Qué ventajas considera que tiene el Teorema antes mencionado?

Revisar los siguientes contenidos:

- Investigar los momentos de inercia con respecto al centros de masa de: *Varilla delgada de longitud L; un paralelepípedo macizo de lados a, b, c; un cilindro macizo de radio R y altura h; un disco circular de radio R; una esfera maciza de radio R; un cono macizo de radio R y altura h.*
- *Revisar el video en Youtube:* "Teorema de Steiner, Teorema de los ejes paralelos, explicación, ejemplo"



Link: https://www.youtube.com/watch?v=3U6wFCblxoE

CONSTRUCCIÓN

Realizar las siguientes actividades: Determinar las expresiones para los momentos y productos de inercia con respecto a cualquier sistema paralelo de ejes, si se conoce los momentos de inercia con respecto a cualquier sistema de ejes rectangulares con origen en el centro de masa, luego determinar la expresión para el momento de inercia con respecto al eje Oa.

1) Presente el material didáctico que se muestra en la figura 8.1 y describa sus elementos.

El modelo representa un cuerpo rígido, donde O es el origen de un sistema cualquiera X, Y, Z. O_1 es el origen del sistema $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ que coincide con el centro de masa (CM), del cuerpo. m' representa una partícula cualquiera del cuerpo. La varilla Oa representa un eje de rotación cualquiera. Los dos sistemas son paralelos y están adheridos al cuerpo.

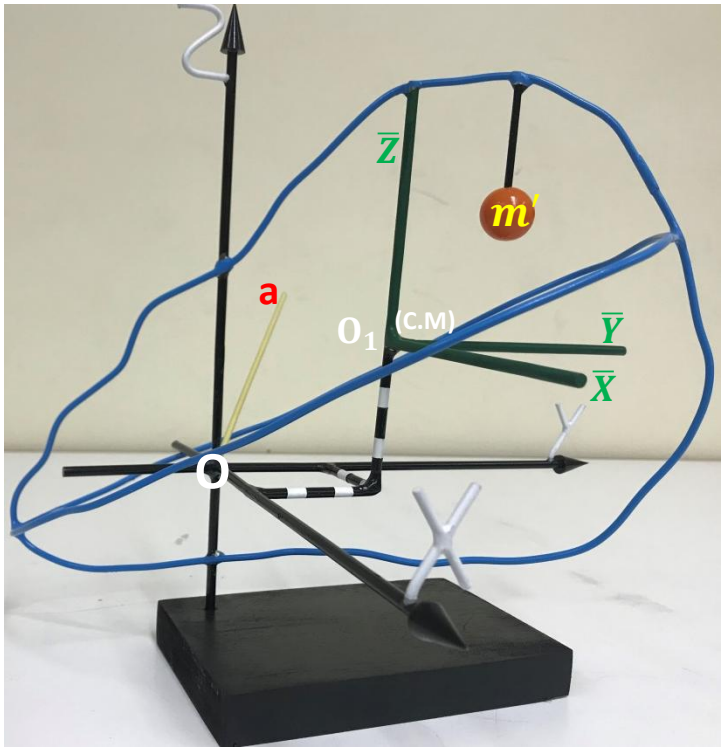


Figura 8.1
Autoría Propia

Pregunta para el estudiante: *¿Cómo determinaría la expresión para los momentos de inercia I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} del cuerpo rígido, con respecto a los ejes X, Y, Z?*

2) Asigne un aproximado de 15 min para que los estudiantes determinen los momentos de inercia con el apoyo del material concreto, figura 8.1, el cual permitirá visualizar de mejor manera los diferentes elementos, luego socialice entre todos los resultados.

3) Se sugiere dar las siguientes orientaciones, para determinar las respectivas expresiones.

a) Para hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes X, Y, Z, se puede observar en el material didáctico que la posición de m' está dada por $x = x_1 + \bar{x}$, $y = y_1 + \bar{y}$, $z = z_1 + \bar{z}$. Para el caso de I_z tenemos:

$$I_z = \sum m'(x^2+y^2) \quad \rightarrow \quad I_z = \sum m'[(x_1+\bar{x})^2+(y_1+\bar{y})^2] \qquad \text{(a)}$$

b) Aplicando algunas operaciones matemáticas, la ecuación anterior se puede escribir en la siguiente forma:

$$I_z = \sum m'(x_1^2+y_1^2) + (\bar{x}^2+\bar{y}^2)\sum m' + 2\bar{x}\sum m'x_1 + 2\bar{y}\sum m'y_1 \qquad \text{(b)}$$

c) Debido a que O_1 se encuentra en el centro de masa, los dos últimos términos de la ecuación anterior son igual a cero, la nueva expresión quedaría así:

$$I_z = \bar{I}_z + M(\bar{x}^2+\bar{y}^2)$$

donde M es la masa total del cuerpo y $(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ es la distancia entre los ejes Z y $\bar{Z}$.

d) Mediante procedimientos similares se puede demostrar que el producto de inercia $I_{yz} = \bar{I}_{yz} + M\bar{y}\bar{z}$. De forma general se tiene:

Donde:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_z + M(\bar{y}^2+\bar{z}^2) \\ I_y &= \bar{I}_y + M(\bar{x}^2+\bar{z}^2) \\ I_z &= \bar{I}_z + M(\bar{x}^2+\bar{y}^2) \end{aligned}\right\}$$

Momentos de inercia respecto a los ejes X, Y, Z en función de cantidades referidas al centro de masa C.M

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + M\bar{x}\bar{y} \\ I_{xz} &= \bar{I}_{xz} + M\bar{x}\bar{z} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{yz} + M\bar{y}\bar{z} \end{aligned}\right\}$$

Productos de inercia respecto a los ejes X, Y, Z en función de cantidades referidas al centro de masa C.M

(c)

Pregunta para el estudiante: *¿Cómo determinar la expresión para los momentos y productos de inercia con respecto al eje Oa de la figura 8.1?*

e) De igual manera, asignar un tiempo suficiente para que los alumnos desarrollen la expresión; luego socializar entre todos las respuestas, las cuales permitan obtener la expresión correcta

4. En la ecuación (c) de la clase anterior, reemplazar los valores de las expresiones (d) tanto de los momentos como de los productos de inercia respecto a los ejes X, Y, Z en función de cantidades referidas al centro de masa C.M. cuyo resultado es el siguiente:

$$I_{Oa} = [\bar{I}_x + M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)]l^2 + [\bar{I}_y + M(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)]m^2 + [\bar{I}_z + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)]n^2 -$$
$$-2[\bar{I}_{xy} + M\bar{x}\bar{y}]lm - 2[\bar{I}_{xz} + M\bar{x}\bar{z}]ln - 2[\bar{I}_{yz} + M\bar{y}\bar{z}]mn$$

Marco teórico

Utilizaremos XYZ para representar un sistema de referencia cualquiera; x, y, z para representar las coordenadas en dicho sistema; $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xy}, I_{yz}$ para representar los correspondientes momentos y productos de inercia. Similarmente, utilizaremos $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ para representar un sistema de referencia con origen en el centro de masa; x_1, y_1, z_1 para representar las coordenadas en dicho sistema; $\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_z, \bar{I}_{xy}, \bar{I}_{xz}, \bar{I}_{yz}$ para representar los correspondientes momentos y productos de inercia. Los sistemas XYZ y $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ se consideran adheridos al cuerpo.

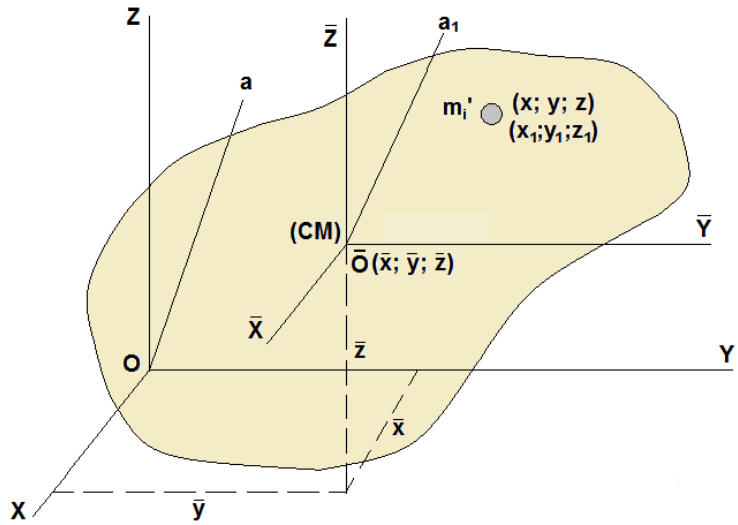


Figura 8.2
Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica Analítica

La figura muestra el sistema XYZ, cuyo origen es O, y el sistema $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, cuyo origen es $\bar{O}$, situado en el centro de masa. Un momento de inercia, por ejemplo I_z, es:

$$I_z = \sum m'(x^2 + y^2) = \sum m'[(x_1 + \bar{x})^2 + (y_1 + \bar{y})^2]$$

esto es:

$$I_z = \sum m'(x_1^2 + y_1^2) + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\sum m' + 2\bar{x}\sum m'x_1 + 2\bar{y}\sum m'y_1$$

que se reduce a:

$$I_z = \bar{I}_z + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

Análisis similares se aplican a los otros momentos y productos de inercia obteniéndose:

$$\boxed{\begin{gathered} I_x = \bar{I}_x + M(\bar{y}^2+\bar{z}^2)\ ;\ \ I_y = \bar{I}_y + M(\bar{x}^2+\bar{z}^2)\ ;\ \ I_z = \bar{I}_z + M(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\ ; \\ I_{xy} = \bar{I}_{xy} + M\bar{x}\bar{y}\ \ ;\ \ I_{xz} = \bar{I}_{xz} + M\bar{x}\bar{z}\ \ ;\ \ I_{yz} = \bar{I}_{yz} + M\bar{y}\bar{z} \end{gathered}}$$

Para determinar el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje cualquiera, Oa, que pasa por O y cuyos cosenos directores son l, m, n, se utiliza la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{Oa} = [\bar{I}_x+M(\bar{y}^2+\bar{z}^2)]l^2 + \left[\bar{I}_y+M(\bar{x}^2+\bar{z}^2)\right]m^2 + [\bar{I}_z+M(\bar{x}^2+\bar{y}^2)]n^2 - \\ -2\left[\bar{I}_{xy}+M\bar{x}\bar{y}\right]lm - 2[\bar{I}_{xz}+M\bar{x}\bar{z}]ln - 2\left[\bar{I}_{yz}+M\bar{y}\bar{z}\right]mn \end{aligned}}$$

Entonces, si se conocen los momentos y los productos de inercia con respecto a un marco $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, inmediatamente se puede calcular el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera

CONSOLIDACIÓN

Hoja de trabajo para el estudiante

Realizar la siguiente actividad haciendo uso del material concreto.

1. Presente y describa el material concreto de la figura 8.3

El material concreto representa un bloque, donde el sistema X, Y, Z, se encuentra adherido a uno de sus vértices y un sistema secundario $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, ubicado en el centro de masa del bloque.

Problema: suponiendo que el bloque de la figura 8.3 tiene una masa $M = 12\,\text{kg}$ determine: a) los momentos y productos de inercia con respecto al centro de masa, b) los momentos y productos de inercia con respecto a O.

Indicaciones:

Se recomienda designar a un estudiante para que mida los lados del bloque y los datos los de a conocer a todos los estudiantes.

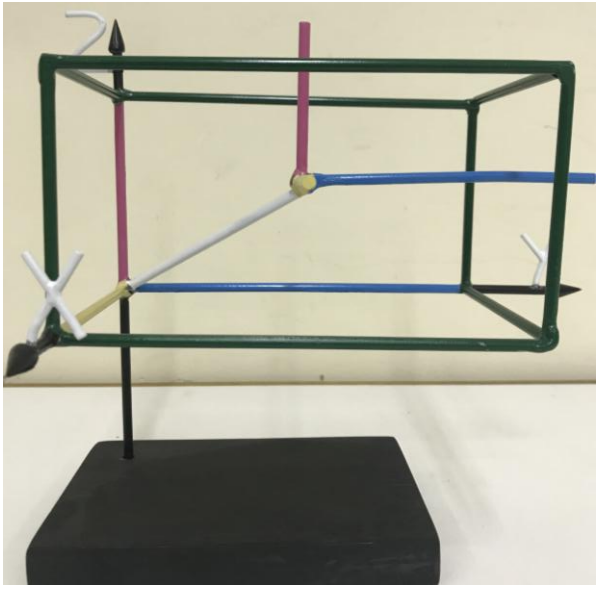


Figura 8.3
Fuente: autoría propia

Luego de esto cada estudiante tendrá que resolver de forma individual el problema.

Para determinar los momentos y productos de inercia se sugiere usar las siguientes expresiones:

$$\bar{I}_x = \int M(y^2+z^2) \qquad \bar{I}_x = \frac{1}{3}M(b^2+c^2)$$

$$\bar{I}_y = \int M(x^2+z^2) \qquad \bar{I}_x = \frac{1}{3}M(a^2+c^2)$$

$$\bar{I}_z = \int M(x^2+y^2) \qquad \bar{I}_x = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

Clase 9

ROTACIÓN CON TRASLACIÓN

La Tierra no se encuentra quieta y suspendida en el universo, sino que efectúa dos movimientos que son la base de la existencia de las condiciones de nuestro planeta. Uno de ellos es el movimiento de rotación, mediante el cual la Tierra gira alrededor de su propio eje. El otro es el movimiento de traslación, a través del cual la Tierra describe una órbita elíptica alrededor del sol. Cada uno de estos movimientos tiene unos efectos concretos sobre el planeta y gracias a ellos se dan fenómenos como las estaciones o el ciclo día/noche.

https://locuraviajes.com/la-tierra-movimiento-de-rotacion-y-traslacion/

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

1) Cuerpo sólido con rotación y traslación.
2) Disco con rotación y traslación.

Descripción modelo 1			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Esfera	Plástico	Tomate	1
Vector $\vec{\omega}$ Vector $\vec{u}$	Hierro	Amarillo	2
Vector $\vec{v_0}$ Vector $\vec{v}$	Hierro	Blanco	2
Eje (X', Y', Z') Ejes (X, Y, Z)	Hierro Hierro	Negro Verde	3 3
Cuerpo	Hierro	Celeste	1
Descripción modelo 2			
Disco	Madera	Marrón	1
Eje de rotación	Metal	Azul	1
Plano X_1, Y_1	Madera	Marrón	1
Eje Z_1	Metal	negro	1

OBJETIVOS:

- Explicar las ecuaciones cinemáticas para un cuerpo rígido con rotación y traslación.
- Aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas propuestos en las actividades.

ANTICIPACIÓN

Con la finalidad de introducir al tema se sugiere proyectar el siguiente video "COMO MALABAREAR CLAVAS" el cual muestra el movimiento de un cuerpo rígido "clava".

Link: https://www.youtube.com/watch?v=nVOlMcE9flg&list=PL3En0vtUOWAaUC6r-Qw7XpDybzSvmJp-i&index=1

Socialice las siguientes preguntas referentes al video:

- ¿Qué tipos de movimientos se pudo observar cuando se lanzaban las "clavas" al aire?
- Pedir más ejemplos de la vida cotidiana, donde se observe cuerpos rígidos en movimiento.
- ¿Conoce algún método que permita determinar la velocidad de un cuerpo rígido irregular?

CONSTRUCCIÓN

Haciendo uso del material didáctico, se sugiere realizar las siguientes actividades:

1. Presente el material didáctico de la figura 9.1 y describa sus elementos.

Se trata de un modelo que representa un cuerpo rígido, donde los ejes X, Y, Z con origen en O se han construido con una cierta rotación, los ejes X', Y', Z' con origen en O' coinciden con O. m' (esferita color tomate) es una partícula cualquiera del cuerpo.

$\vec{\omega}$: Representa la velocidad angular del cuerpo

$\vec{u}$: Representa la velocidad lineal de m' con respecto a O'

$\vec{v}$: Velocidad de la partícula m' con respecto al marco inercial $(X_1, Y_{1,}, Z_1)$

$\vec{v_o}$: Representa la velocidad de O y O' con respecto al marco inercial $X_1, Y_{1,}, Z_1$.

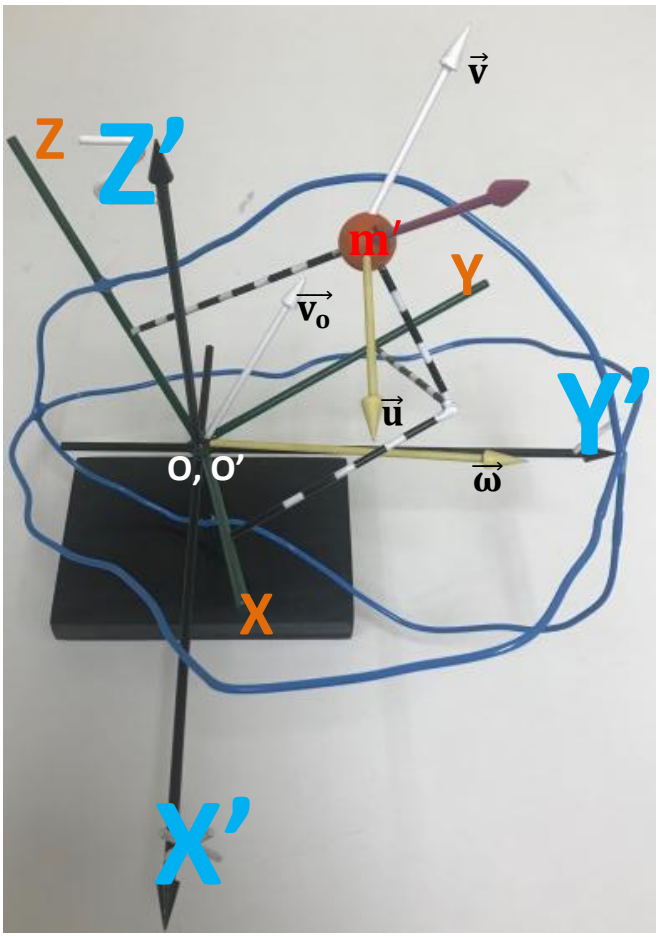


Figura 9.1
Fuente: Autoría propia

2. Para determinar una expresión para la velocidad de un cuerpo rigido, se sugiere que realice un análisis conjuntamente con los estudiantes. Primeramente pase el material didáctico a todos los estudiantes para que puedan visualizar todos sus elementos (ejes, vectores, partícula y sus coordenadas…) y analizarlo de mejor manera.

3. Defina tres marcos de referencia:
   - $X_1, Y_{1,}, Z_1$ escoja uno que sea conveniente para la explicación (pueden ser las aristas de una pared).
   - X', Y', Z' con origen en **O'** , (debe permanecer paralelo a $X_1, Y_{1,}, Z_1$)
   - X, Y, Z con origen en **O.**

4. Pregunta para el estudiante: Si el marco de referencia $X_1, Y_{1,}, Z_1$ se mantiene fijo, X', Y', Z' se traslada, pero sus ejes se mantienen paralelos a $X_1, Y_{1,}, Z_1$ y X, Y, Z puede o no rotar. ¿Qué marco de referencia es el inercial y el no inercial?

5. Pida a los estudiantes determinar las componentes de $\vec{\omega}$ y $\vec{u}$ con respecto a O y O'

$$\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z \;\&\; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \qquad \vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z \;\&\; \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z,$$

6. A continuación pida hallar una expresión para la velocidad.

$$\vec{v} = \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{Donde } \vec{r} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u'}_x & \vec{u'}_y & \vec{u'}_z \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{u}'_x = (\omega'_y z' - \omega'_z y')\vec{\imath}' \;;\; \vec{u}'_y = (\omega'_z x' - \omega'_x z')\vec{\jmath}' \;;\; \vec{u}'_z = (\omega'_x y' - \omega'_y x')\vec{k}'} \quad \text{(a)}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_x = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{\imath} \;;\; \vec{u}_y = (\omega_z x - \omega_x z)\vec{\jmath} \;;\; \vec{u}_z = (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}} \quad \text{(b)}$$

sabiendo que: $\vec{\omega}_x = \vec{\omega}'_x l_x + \vec{\omega}'_y m_x + \vec{\omega}'_z n_x \;;\; \vec{\omega}_y = \vec{\omega}'_x l_y + \vec{\omega}'_y m_y + \vec{\omega}'_z n_y \;;\; \vec{\omega}_z = \vec{\omega}'_x l_z + \vec{\omega}'_y m_z + \vec{\omega}'_z n_z$

7. Considerando que O y O' se mueven con velocidad $\vec{v}_O$ con respecto al marco inercial $X_1Y_1Z_1$, y $\vec{v}_O$ de componentes $\vec{v}_{Ox}, \vec{v}_{Oy}, \vec{v}_{Oz}$ con respecto al marco XYZ, entonces las correspondientes componentes de la velocidad de m' con respecto al marco inercial, en función de XYZ serán:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_x &= \vec{v}_{Ox} + (\omega_y z - \omega_z y)\vec{\imath} \\ \vec{v}_y &= \vec{v}_{Oy} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{\jmath} \\ \vec{v}_z &= \vec{v}_{Oz} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k} \end{aligned}} \quad \text{(c)}$$

6. Algunos ejemplos de la vida cotidiana donde se puede visualizar cuerpos rígidos con rotación y traslación:

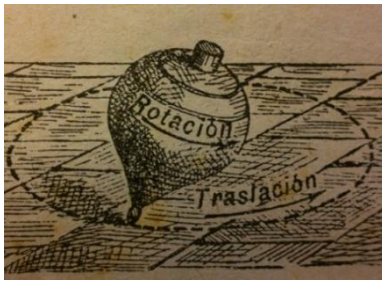


Figura 9.2

Figura 9.3

Figura 9.4

Fuente de imágenes: Google

Marco teórico

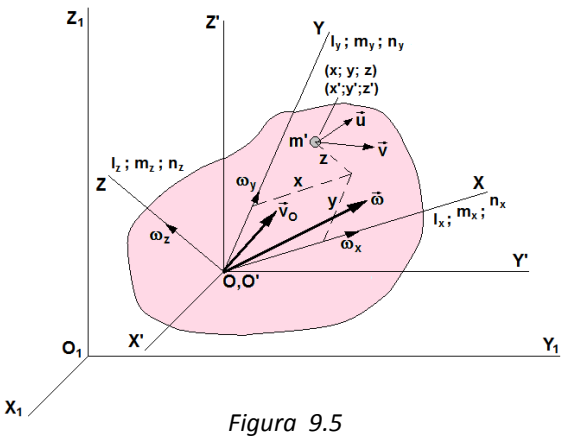


Figura 9.5
Fuente: Avecillas, A. (2018) Mecánica Analítica, Cuenca.

El cuerpo de la figura 9.5 tiene traslación y rotación. El marco XYZ, adherido al cuerpo en O, puede rotar o no con respecto al cuerpo. El marco $X'Y'Z'$, con su origen O' coincidente con O, mantiene sus ejes paralelos con respecto al marco inercial $X_1Y_1Z_1$. Las coordenadas de m' son $(x; y; z)$, para O, & $(x'; y'; z')$, para O'. El vector $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular del cuerpo y $\vec{u}$ es la velocidad lineal de m' con respecto a O'. Las componentes de $\vec{\omega}$ y de $\vec{u}$ con respecto a O' son $\vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z$ & $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$, tales que:

$$\boxed{\vec{u}'_x = \left(\omega'_y z' - \omega'_z y'\right)\vec{\imath}' \ ; \ \vec{u}'_y = (\omega'_z x' - \omega'_x z')\vec{\jmath}' \ ; \ \vec{u}'_z = \left(\omega'_x y' - \omega'_y x'\right)\vec{k}'} \tag{9.1}$$

Similarmente, las componentes de $\vec{\omega}$ y de $\vec{u}$ con respecto a O son $\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z$ & $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$, tales que:

$$\boxed{\vec{u}_x = \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\vec{\imath} \ ; \ \vec{u}_y = (\omega_z x - \omega_x z)\vec{\jmath} \ ; \ \vec{u}_z = \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\vec{k}} \tag{9.2}$$

donde:

$$\vec{\omega}_x = \vec{\omega}'_x l_x + \vec{\omega}'_y m_x + \vec{\omega}'_z n_x \ ; \ \vec{\omega}_y = \vec{\omega}'_x l_y + \vec{\omega}'_y m_y + \vec{\omega}'_z n_y \ ; \ \vec{\omega}_z = \vec{\omega}'_x l_z + \vec{\omega}'_y m_z + \vec{\omega}'_z n_z$$

Si además O y O' se mueven con velocidad $\vec{v}_O$ con respecto al marco inercial $X_1Y_1Z_1$, y $\vec{v}_O$ tiene componentes $\vec{v}_{Ox}, \vec{v}_{Oy}, \vec{v}_{Oz}$ con respecto al marco XYZ, entonces las correspondientes componentes de la velocidad de m' con respecto al marco inercial, en función de XYZ serán:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_x &= \vec{v}_{Ox} + \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\vec{\imath} \\ \vec{v}_y &= \vec{v}_{Oy} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{\jmath} \\ \vec{v}_z &= \vec{v}_{Oz} + \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\vec{k} \end{aligned}} \tag{9.3}$$

Observe que $\vec{v}_{Ox}, \vec{v}_{Oy}, \vec{v}_{Oz}$ representan las componentes de $\vec{v}_O$ en las direcciones instantáneas de XYZ. Asimismo, las componentes $\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z$ corresponden a las direcciones instantáneas de XYZ. Finalmente, la velocidad angular $\vec{\omega}$ es la misma para todas las partículas que integran el cuerpo rígido.

CONSOLIDACIÓN Hoja de trabajo para el estudiante

Resolver el siguiente problema propuesto

1. Presente el material concreto de la figura 9.6 y dé una breve descripción del mismo.

El material concreto consta de un disco de madera que puede girar libremente sobre su propio eje y sobre el eje Z_1.

Problema: El disco de la figura 9.3 puede rodar sin resbalar, en contacto con el plano X_1, Y_1. Si se toman los ejes X, Y, Z fijos al cuerpo con origen en O, halle las componentes de la velocidad angular: ω_x, ω_y, ω_z

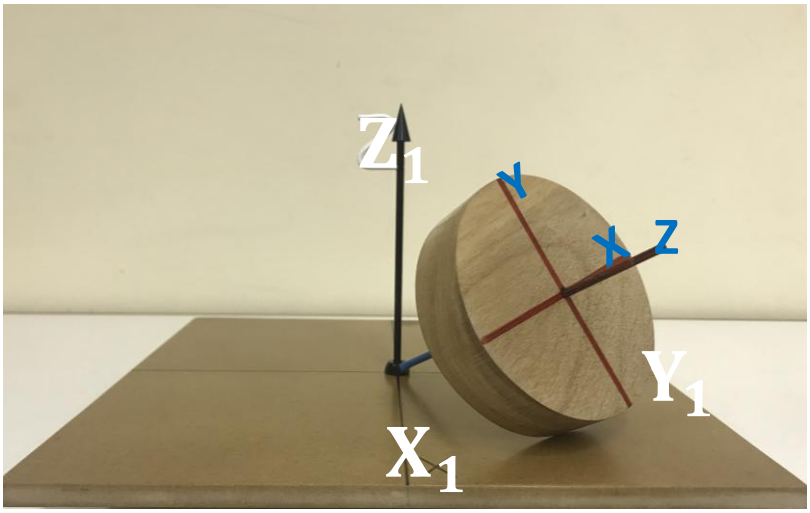


Figura 9.6
Fuente: Autoría Propia

Indicaciones:

- Pida a los estudiantes ubicarse alrededor de una mesa donde se colocará el material concreto y ponga en funcionamiento de modo que todos los estudiantes puedan observar el movimiento.
- Luego de haber observado el fenómeno dinámico pida a los estudiantes realizar el desarrollo correspondiente y resolver el problema.
- Se sugiere que muestre la figura 9.4 como apoyo para visualizar de mejor manera los parámetros involucrados en el problema.

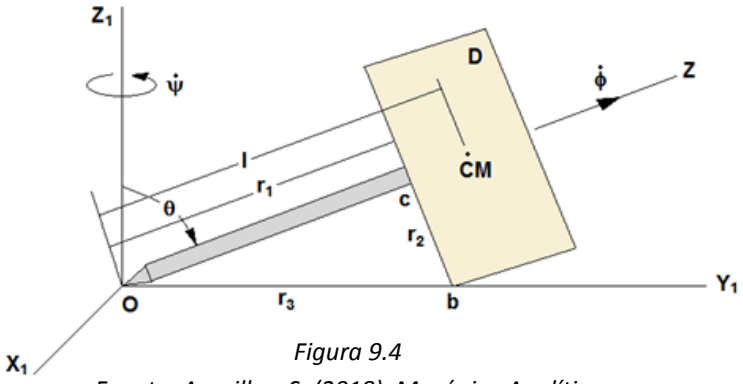
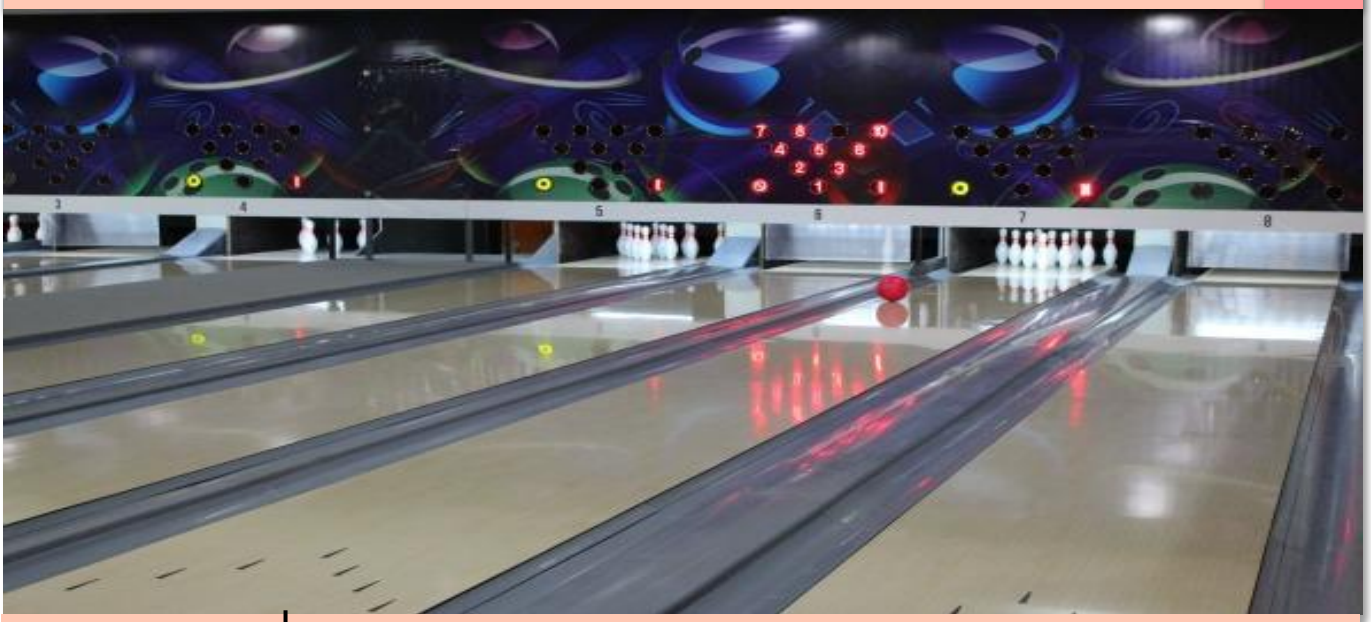


Figura 9.4
Fuente: Avecillas, S. (2018). Mecánica Analítica

Clase 10

ENERGÍA CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO



Aunque el concepto de energía cinética se remonta a los días de Aristóteles, Lord Kelvin recibe el crédito de utilizar el término por primera vez alrededor del año 1849.

La energía cinética es uno de los dos tipos principales de energía. Cuando algo está en movimiento, tiene energía cinética. El viento y el agua son ejemplos de cosas con energía cinética porque se están moviendo. La electricidad es también una forma de energía cinética. La energía cinética incluye muchas formas de movimiento tales como vibraciones y rotaciones.

Fuente: https://www.frases333.com/datos-curiosos-sobre-la-energia-cinetica/

GUÍA PARA EL DOCENTE

Tiempo sugerido: 2 horas

Material concreto:

1) Energía cinética de una varilla.
2) Energía cinética de un disco.

Descripción del modelo 1			
Elemento	**Material**	**Color**	**Cantidad**
Ejes	Metal	negro	3
Varilla maciza	Metal	Blanco	1
Radio	Metal	Amarillo	1
Descripción del modelo 2			
Disco	Madera	Marrón	1
Eje en forma de U	Metal	Negro	1
Varilla inclinada	Metal	Blanco y negro	1
Ejes	Metal	Rosado	3

OBJETIVOS:

- Determinar la expresión de la energía cinética para un cuerpo rígido.
- Resolver problemas con el apoyo del material concreto.

ANTICIPACIÓN

Realice las siguientes preguntas para que los estudiantes respondan en su cuaderno de trabajo:

Figura 10.1
Fuente: google

- Defina con sus palabras la energía cinética para una partícula.
- Cuando la masa de un objeto se duplica, su energía cinética se mantiene constante. F ( ) V( )
- Cuando la velocidad de un objeto se duplica, su energía cinética se cuadruplica. F( ) V( )
- Cuando una móvil en una montaña rusa sube la colina, pierde energía cinética F( ) V( )

Mencione algunas situaciones donde se encuentre la energía cinética. Por ejemplo: Un automóvil de la fórmula 1, montaña rusa, etc. Además, pida a los estudiantes nombrar más ejemplos donde intervenga la energía cinética.

CONSTRUCCIÓN

Para el desarrollo del tema los estudiantes deberán determinar la expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en base a los conceptos aprendidos y luego resolver problemas usando material concreto.

1) Actividad para el estudiante: encontrar la expresión general para la energía cinética de un cuerpo rígido.

   a) Sugerencia: realice las siguientes preguntas y asigne un aproximado de 15 min para que los estudiantes respondan y socialicen conjuntamente sus respuestas.

   ¿Conoce alguna expresión para la energía de un cuerpo rígido?

   ¿Considera que la expresión de la energía cinética de una partícula es igual que para un cuerpo rígido? Justifique su respuesta.

   Demostración: La expresión para la energía cinética del cuerpo rígido se puede obtener sustituyendo la ecuación del literal (c) de la clase anterior en la expresión conocida $T = \frac{1}{2}\sum m'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

$$\vec{v}_x = \vec{v}_{Ox} + (\omega_y z - \omega_z y)\vec{\imath}$$
$$\vec{v}_y = \vec{v}_{Oy} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{\jmath}$$
$$\vec{v}_z = \vec{v}_{Oz} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$$

   Al realizar algunas operaciones matemáticas y utilizando conceptos previos se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}Mv_O^2 + \frac{1}{2}\left[I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right] + \\ + M\left[v_{Ox}(\omega_y\bar{z} - \omega_z\bar{y}) + v_{Oy}(\omega_z\bar{x} - \omega_x\bar{z}) + v_{Oz}(\omega_x\bar{y} - \omega_y\bar{x})\right] \qquad \text{(a)}$$

Recordemos que $\vec{\omega}$ & $\vec{v}_O$ representan las velocidades angular y lineal en un marco inercial.

Tenga en cuenta:

La ecuacion (a) muestra que la energía cinética total es la suma de la enegia traslacional y rotacional

$E_{c(rot)} = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad E_{c(trasl)} = \frac{1}{2}Mv^2$

2) Resolver los siguientes problemas con ayuda de los materiales concretos, conjuntamente con los estudiantes resolver el primer problema y el segundo lo harán los estudiantes.

a) Presente y dé una breve descripción del material concreto de la figura 10.2

El material concreto consta de un sistema X_1, Y_1, Z_1 una varilla maciza con eje de rotación en O, y esta a su vez rota alrededor del Eje Z_1 con una distancia fija R.

Problema 1: La varilla maciza de longitud L y masa M de la figura 10.2 puede girar hasta un ángulo θ alrededor de un eje horizontal. Está adherido al brazo horizontal AB que gira con velocidad angular $\dot{\phi}$. Halle la energía cinética de la varilla.

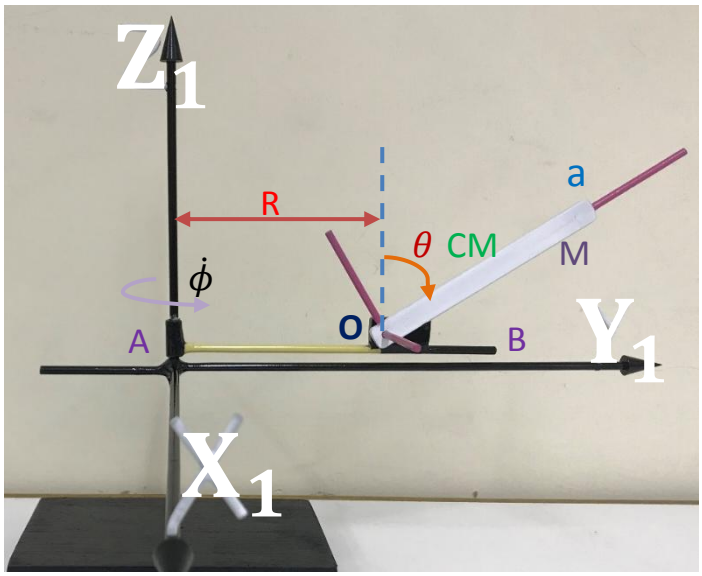


Figura 10.2
Fuente: Autoría Propia

b) Resuelva el problema conjuntamente con los estudiantes:

- Coloque el material concreto sobre una mesa, donde todos los estudiantes puedan observar su funcionamiento.
- Haga rotar la varilla maciza Oa ángulos θ pequeños y a su vez haga girar en sentido anti horario la varilla AB alrededor del eje Z_1.
- Identifique cuántos grados de libertad posee el sistema:

El sistema tiene dos grados de libertad, ϕ y θ.

- Escriba las componentes de la velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\phi}}$$

$$\omega_x = -\dot{\theta}\ ;\ \ \omega_y = \dot{\phi}Cos\theta\ ;\ \ \omega_z = \dot{\phi}Sen\theta$$

- Componentes instantáneas sobre los ejes XYZ:

$$v_{Ox} = -R\dot{\phi}\ ;\ \ v_{Oy} = 0\ ;\ \ v_{Oz} = 0 \quad \therefore \quad v_O^2 = R^2\dot{\phi}^2$$

- A continuación, determine las coordenadas del centro de masa de la barra, los momentos y productos de inercia:

$\bar{x} = 0\,;\ \bar{y} = L/2\ ;\ \bar{z} = 0$

$I_x = I_z\,;\ I_y = 0\,;\ I_{xy} = 0\,;\ I_{xz} = 0\,;\ I_{yz} = 0$

- Encuentre la ecuación de la energía cinética correspondiente al problema:

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left[I_x\dot{\theta}^2 + 0 + I_z\dot{\phi}^2 Sen^2\theta - 0 - 0 - 0\right] + M\left[-R\dot{\phi}\left(0 - \dot{\phi}Sen\theta\frac{L}{2}\right) + 0 + 0\right]$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_x\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_z\dot{\phi}^2 Sen^2\theta + \frac{MRL}{2}Sen\theta\frac{L}{2}\dot{\phi}^2}$$

Actividad para el estudiante:

1. Dé una breve descripción del material concreto de la figura 10.3 y déjelo a disposición de los estudiantes para que puedan visualizar, manipular y resolver el problema

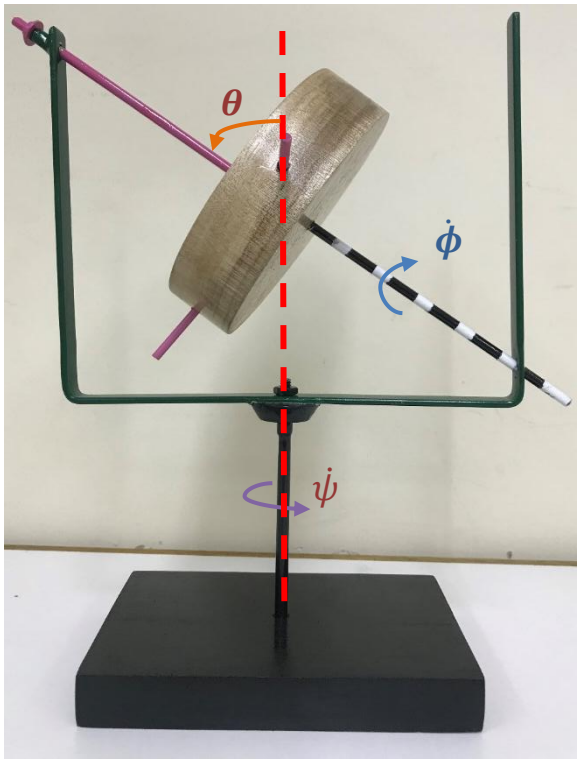


Figura 10.3
Fuente: Autoría Propia

El material concreto consta de un disco que puede girar alrededor de un eje inclinado, que a su vez está apoyado mediante un soporte giratorio en forma de U.

Problema 2: El disco de la figura 10.3 gira con velocidad angular $\dot{\phi}$ con respecto al marco de soporte, el cual gira con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor del eje vertical. Determine la energía cinética del sistema

Indicaciones:

- Gire el disco sobre su propio eje y al mismo tiempo haga girar el soporte en forma de U. (Tenga en cuenta que debe girar con distintas velocidades).
- Observe y describa el movimiento.
- Identifique los grados de libertad.
- Escriba las componentes de la velocidad angular $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$.
- Las componentes instantáneas sobre XYZ.

- Determine las coordenadas del centro de masa de la barra, los momentos y productos de inercia.
- Escriba la ecuación correspondiente de la energía cinética del disco.

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left[\bar{I}_x\dot{\psi}^2 Sen^2\theta + \bar{I}_z\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}Cos\theta\right)^2 + \bar{I}_m\dot{\psi}^2\right]}$$

Marco teórico:

Para el caso del cuerpo rígido, la sencilla ecuación $T = \frac{1}{2}Mv^2$ se vuelve bastante compleja debido a las posibles rotaciones que pueda tener el cuerpo. Sin embargo, la expresión de la energía cinética del cuerpo rígido se obtiene sustituyendo las ecuaciones (3.5.3) en la expresión conocida $T = \frac{1}{2}\sum m'\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$. Al realizar las operaciones y desarrollar un poco de álgebra se obtiene:

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{2}M\left(v_{Ox}^2+v_{Oy}^2+v_{Oz}^2\right) + \tfrac{1}{2}\omega_x^2\sum m'(y^2+z^2) + \tfrac{1}{2}\omega_y^2\sum m'(x^2+z^2) + \tfrac{1}{2}\omega_z^2\sum m'(x^2+y^2) - \\ -\tfrac{1}{2}\omega_x\omega_y\sum m'xy - \tfrac{1}{2}\omega_x\omega_z\sum m'xz - \tfrac{1}{2}\omega_y\omega_z\sum m'yz + v_{Ox}\left(\omega_y\sum m'z - \omega_z\sum m'y\right) + \\ +v_{Oy}(\omega_z\sum m'x - \omega_x\sum m'z) + v_{Oz}\left(\omega_x\sum m'y - \omega_y\sum m'x\right) \end{aligned}$$

la cual, utilizando conceptos previos, se condensa en la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} T = \frac{1}{2}Mv_O^2 + \frac{1}{2}\left[I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-2I_{xy}\omega_x\omega_y-2I_{xz}\omega_x\omega_z-2I_{yz}\omega_y\omega_z\right] + \\ +M\left[v_{Ox}\left(\omega_y\bar{z}-\omega_z\bar{y}\right) + v_{Oy}(\omega_z\bar{x}-\omega_x\bar{z}) + v_{Oz}\left(\omega_x\bar{y}-\omega_y\bar{x}\right)\right] \end{aligned}} \qquad (10.1)$$

Recordemos que $\vec{\omega}$ & $\vec{v}_O$ representan las velocidades angular y lineal en un marco inercial. Además, $v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ son las "componentes instantáneas" de $\vec{\omega}$ & $\vec{v}_O$ en el sistema XYZ, que se considera *fijo al cuerpo rígido*. Los valores de $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ se determinan con respecto a este mismo sistema XYZ.

Casos particulares:

Si el punto O se encuentra en el centro de masa del cuerpo rígido, la ecuación (10.1) se reduce a:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left[\bar{I}_x\omega_x^2+\bar{I}_y\omega_y^2+\bar{I}_z\omega_z^2-2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y-2\bar{I}_{xz}\omega_x\omega_z-2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z\right]} \qquad (10.2)$$

Si el punto O se halla fijo a un marco inercial, la ecuación (10.1) se reduce a:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left[I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-2I_{xy}\omega_x\omega_y-2I_{xz}\omega_x\omega_z-2I_{yz}\omega_y\omega_z\right]}$$

(10.3)

Finalmente, si el punto O se encuentra en el centro de masa y los ejes X, Y, Z se han orientado de modo que coincidan con los ejes principales de inercia, la ecuación (10.1) se convierte en:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left[\bar{I}_x^p \omega_x^2 + \bar{I}_y^p \omega_y^2 + \bar{I}_z^p \omega_z^2\right]} \tag{10.4}$$

CONSOLIDACIÓN **Hoja de trabajo para el estudiante**

Responda las siguientes preguntas:

1) Investigue sobre el concepto de energía cinética de un cuerpo rígido y resuma con sus palabras:

   ……

   ……

   ……

   ……

Resolver los siguientes problemas propuestos:

1) Suponga que reemplazamos el disco de la figura 10.2 por un cuerpo rígido cualquiera. Evidentemente el centro de masa no coincidirá con el punto O y, por lo mismo, los ejes X, Y, Z no son principales. Determine la energía cinética de dicho cuerpo.
2) El disco pesado de la figura 10.4 puede rodar sin resbalar, en contacto con el plano X_1Y_1. Si se toman los ejes X, Y, Z fijos al cuerpo con el origen en O, determine la energía cinética del disco. (la descripción del material de la figura 10.4 ver en la clase 9, figura 9.3)

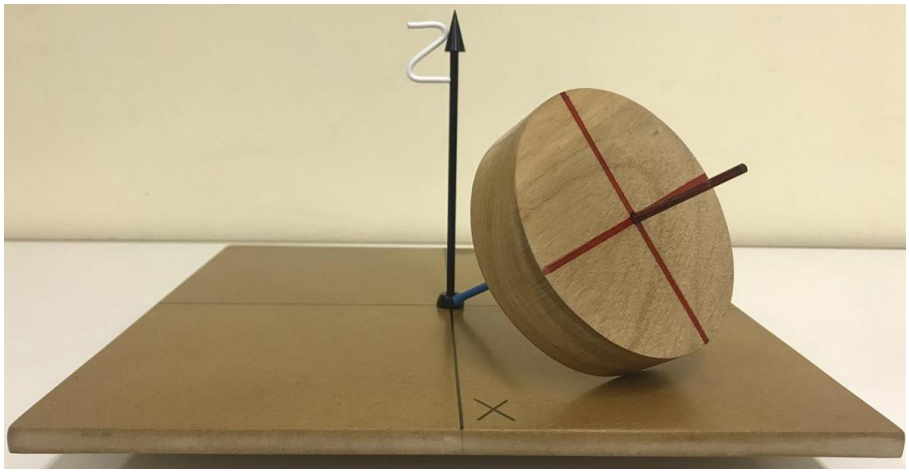


Figura 10.4
Fuente: Autoría Propia

3.2 Validación de recursos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

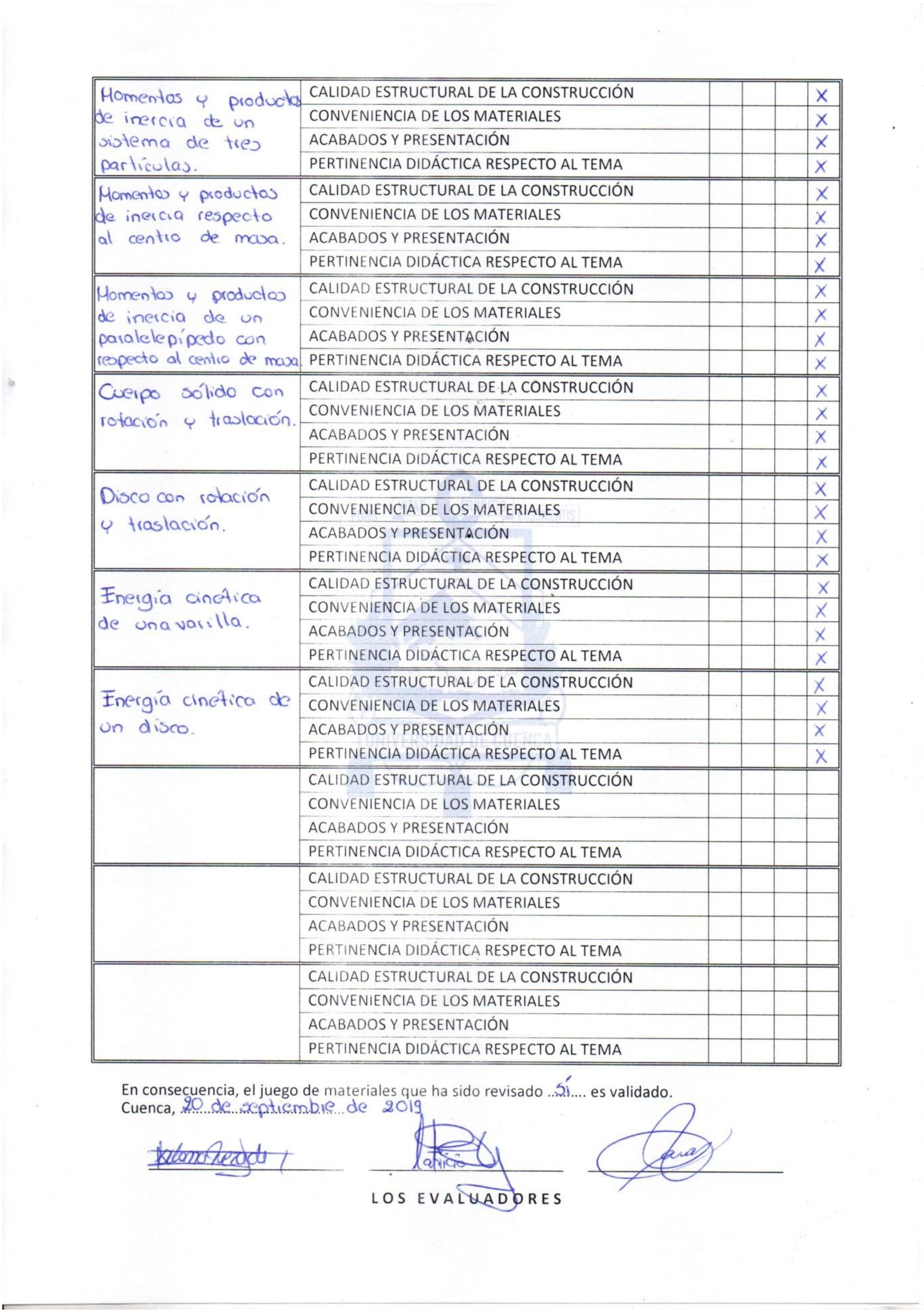
MATRIZ DE VALIDACIÓN DE EQUIPO CONCRETO

DISEÑADO Y CREADO PARA MATEMÁTICAS Y FÍSICA CON MOTIVO DE TRABAJOS DE GRADUACIÓN

TÍTULO: "ENSEÑANZA DE LA MECÁNICA ANALÍTICA CON EL APOYO DE RECURSOS DIDÁCTICOS"

AUTORES: Tamia Pacari Contento Chalán y Óscar Fabián Nivelo Muicela

DENOMINACIÓN DEL MATERIAL	PARÁMETRO	VALORACIÓN 1	2	3	4
Velocidad de una partícula en coordenadas generalizadas.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Péndulo sobre apoyo giratorio.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Desplazamiento y trabajo virtuales de una partícula.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Modelo para fuerzas generalizadas.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Movimiento bajo un marco y restricción móvil.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Sistema de partículas acopladas mediante poleas.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Sistema de partículas acopladas mediante resortes	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X



Momentos y productos de inercia de un sistema de tres partículas.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Momentos y productos de inercia respecto al centro de masa.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Momentos y productos de inercia de un paralelepípedo con respecto al centro de masa	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Cuerpo sólido con rotación y traslación.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Disco con rotación y traslación.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Energia cinética de una varilla.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
Energía cinética de un disco.	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				X
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				X
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				X
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				X
	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				
	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				
	CALIDAD ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN				
	CONVENIENCIA DE LOS MATERIALES				
	ACABADOS Y PRESENTACIÓN				
	PERTINENCIA DIDÁCTICA RESPECTO AL TEMA				

En consecuencia, el juego de materiales que ha sido revisado ...sí.... es validado.
Cuenca, 20 de septiembre de 2019

LOS EVALUADORES

CONCLUSIONES

Con la aplicación de dos técnicas de investigación: grupos focales y entrevistas, se logró evidenciar el problema de visualización espacial o tridimensional y la falta de conocimientos previos, que tienen los alumnos al estudiar Mecánica Analítica en la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.

La necesidad de proponer estrategias didácticas basadas en el aprendizaje significativo y la teoría sociocultural, las mismas tienen gran utilidad, debido a que permiten que los estudiantes construyan el conocimiento partiendo de la información que posea en su estructura cognitiva, además de la interacción que se genere dentro del aula de clase.

Los recursos didácticos, ya sea material concreto o recursos tecnológicos, cumplen una función muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que son herramientas que facilitan el desarrollo y comprensión de los temas estudiados, además de motivar al estudiante; la selección de los mismos depende en mayor parte de los objetivos de aprendizaje.

Los modelos físicos o maquetas tienen la ventaja de que son manipulables y mejoran la visualización espacial, ya que muchos sistemas dinámicos estudiados en Mecánica Analítica son complejos debido a que pueden rotar o trasladar con respecto a algún marco de referencia.

RECOMENDACIONES

Se recomienda hacer investigaciones de tipo cualitativa debido a que esta técnica permite interactuar directamente con el participante y obtener información más detallada sobre las opiniones o experiencias de acuerdo a la temática que se desea investigar.

Diseñe y construya material concreto manipulable, llamativo y duradero de tal manera que sea motivador y permita alcanzar los objetivos planteados.

Se recomienda que la guía para el docente sea usada como una herramienta pedagógica dentro del aula de clase; esta brindará soporte y permitirá mejorar la comprensión de los temas de Mecánica Analítica.

Es recomendable que el docente emplee material concreto y lo complemente con recursos tecnológicos, en el estudio de contenidos de Mecánica Analítica. Un material concreto o simulador permite visualizar de mejor manera ciertos fenómenos físicos, los cuales deben ser llamativos motivando al estudiante.

Por último que aproveche las facilidades tecnológicas que le favorecen actualmente para implementar estrategias de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Ed. Trillas.

Avecillas, S. (2018) *Mecánica Analítica*, Cuenca: Centro de Publicaciones y Difusión.

Carretero, M. (1997). ¿Qué es el constructivismo?. *Progreso.* Recuperado de: http://www. educando. edu. do/Userfiles P, 1.

Chaves, A. (2001). Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vigotsky. *Revista educación* 25(2). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44025206

Collazos, C. A., & Mendoza, J. (2006). Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula. *Educación y educadores*, *9*(2), 61-76.

Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Investigación en educación médica*, *2*(7), 162-167

Elizondo Treviño, M. D. S. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia Universitaria*, *3*(5), 70-77.

Escobar, J. & Bonilla-Jimenez, F. (s.f.). *Grupos focales: una guía conceptual y metodológica.* Cuadernos hispanoamericanos de psicología, 9(1). Pp. 51-67. Recuperado de: http://www.tutoria.unam.mx/sitetutoria/ayuda/gfocal-03122015.pdf

Galdámez, N., Sanz, C. V., & De Giusti, A. E. (2011). Diseño de un entorno web colaborativo orientado al ámbito educativo para desarrollar la técnica de Brainstorming. In *XVII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*.

García Hernández, I., & de la Cruz Blanco, G. D. (2014). Las guías didácticas: recursos necesarios para el aprendizaje autónomo. *Edumecentro*, 6(3), 162-175.

Guerrero, A (2009). Los materiales didácticos en el aula. *Revista digital para profesionales de la enseñanza*. Recuperado de: https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd6415.pdf

Jiménez Palmero, D., Mora Núñez, M., & Cuadros Muñoz, R. (2016). La importancia de las nuevas tecnologías en el proceso educativo. Propuesta didáctica TIC para ELE: mELEndien7dias. *Revista Fuentes*, *18*(2), 209-223.

Juárez, I. A., De la Vega, J. A., Espinosa, O. L., & Hidalgo, A. Z. (2014). Análisis de criterios de evaluación para la calidad de los materiales didácticos digitales. *CTS: Revista iberoamericana de ciencia, tecnología y sociedad*, *9*(25), 73-89.

Morales, P. (2012). *Elaboración de material didáctico*. Tlalnepantla, Estado de México: Editorial *RED TERCER MILENIO SC.*

Moreira, M. A. (2012). ¿Ala final, qué es aprendizaje siginificativo?. *Qurriculum: revista de teoría, investigación y práctica educativa. La Laguna, Espanha*, (25), 29-56.

Muñoz., P., S. (2014). *Análisis de las dificultades en la comprensión de la Cinemática en Bachillerato. Evaluación del uso de Tracker para facilitar el aprendizaje* (Tesis de maestria). Universidad internacional de la Rioja, Barcelona

Orozco, A. M. M., & Henao, A. M. G. (2013). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, *4*(1), 101-108.

Ortiz, G, Dorys (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia: colección de Filosofía de la Educación,* 19 (2), 93-110.

Palmero, M. L. R. (2008). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. Editorial Octaedro.

Pérez Flores, R., Pérez Ricárdez, A., & Bastién Montoya, M. (2005). Visualización: etapa fundamental para el aprendizaje de la Fisica. *Enseñanza de las Ciencias*, (Extra), 1-5.

Pizarro, J de. (2000). El análisis de estudios cualitativo. *Atención primaria*, *25*(1), 42-46.

Rivera Michelena, N. (2016). Una óptica constructivista en la búsqueda de soluciones pertinentes a los problemas de la enseñanza-aprendizaje. *Educación Médica Superior*, *30*(3), 609-614.

Sánchez, M. G. B., Moreno, A. R. M., & Torres, R. H. (2014). El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. *Ciencia y tecnología*, *1*(14).

Sepúlveda López, A., Medina García, C., & Sepúlveda Jáuregui, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, *21*(2), 79-115.

Universidad de las Américas. (2015). *Guía de métodos y estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Recuperadode:https://www.udla.cl/portales/tp9e00af339c16/uploadImg /File/guias/4%20Gui%CC%81a%20me%CC%81todos%20y%20estrategias%20UDLA%20 ISBN%20978-956-8695-06-4-2016-APA.pdf

Yacuzzi, L., & Borzi, S. L. (2015). La génesis de la representación en Piaget y en Vigotsky. In *V Congreso Internacional de Investigación de la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional de La Plata (La Plata, 2015).*

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE CUENCA FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Instrumento para recolección de datos aplicada a los estudiantes de la Universidad de Cuenca de la Carrera de Matemáticas y Física.

Guía de preguntas del Grupo Focal

Objetivo: Recolectar información sobre las dificultades que presentan los estudiantes al momento de estudiar Mecánica Analítica y posteriormente diseñar y construir recursos didácticos que mejoren su comprensión.

Preguntas iniciales:

¿Qué le ha parecido la asignatura de Mecánica Analítica?

¿Ha visto algunas ventajas respecto a la Mecánica Clásica o Newtoniana? ¿Cuáles?

1. ¿Cómo describirían la asignatura de Mecánica Analítica en cuanto a la importancia y la dificultad de la misma? ¿Qué expectativas tenía antes del curso?

2. ¿Qué conocimientos previos considera los más importantes para estudiar la Mecánica Analítica? ¿Por qué?

3. ¿Cuáles fueron o son las principales fuentes de información que utilizaron para estudiar los diversos contenidos de Mecánica Analítica? ¿Cuánto tiempo empleaban para estudiarlos? ¿Considera que fueron suficientes?

4. ¿Los diferentes contenidos estudiados en Mecánica Analítica han sido comprendidos con claridad o ha tenido alguna dificultad? ¿Por qué considera que han surgido esas dificultades?

5. Varios ejemplos o enunciados de los problemas planteados en M.A generalmente se presentan con imágenes, fotografías, ilustraciones. ¿Considera que son suficientes para analizar y obtener toda la información del sistema? ¿Si, Por qué? ¿No, Por qué?

6. El docente que impartía clases. ¿Usaba algún tipo de material o recurso para explicar: teoría, ejercicios modelo, etc.? ¿Qué recursos o materiales usaba? ¿Qué beneficios aportaban dichos recursos?

7. De acuerdo con su experiencia ¿Qué tipo de recursos didácticos consideran uds. que mejorarían la comprensión de la M.A ?

8. ¿De qué forma consideran que los recursos tecnológicos como: software, graficadoras, simuladores, videos, páginas web, etc., mejorarían la comprensión de los contenidos de M.A?

9. ¿Qué beneficios creen que aportan los recursos didácticos tales como las maquetas?

10. ¿Qué ventajas consideran que tiene el hecho de usar un material concreto manipulable frente a una imagen o fotografía de un sistema dinámico? Por ejemplo un sistema de varias partículas acopladas mediante poleas.

11. ¿Qué experiencias han tenido trabajando en grupos, considera que sería aplicable al momento de estudiar M.A? ¿Qué beneficios traería?

UNIVERSIDAD DE CUENCA FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de preguntas de la Entrevista

Objetivo: Obtener información por parte del docente de asignatura de Mecánica Analítica sobre sus estrategias didácticas y conocer los problemas o dificultades que tienen los estudiantes al analizar los diversos sistemas dinámicos, para posteriormente diseñar y construir recursos didácticos que mejoren su comprensión.

1. ¿Cómo considera usted la enseñanza de la mecánica analítica?
2. ¿Qué dificultades ha tenido al momento de impartir la enseñanza de Mecánica Analítica a sus estudiantes?
3. ¿Cuáles han sido los problemas o dificultades más comunes que ha visto en los estudiantes al momento de estudiar los diversos temas de Mecánica Analítica?
4. ¿Cuáles son las técnicas o estrategias que usa comúnmente para impartir clases de Mecánica Analítica?
5. Varios ejemplos o enunciados de los problemas planteados en Mecánica Analítica generalmente se presentan con imágenes, fotografías, ilustraciones. ¿Considera que son suficientes para analizar y obtener toda la información del sistema? ¿Si, Por qué? ¿No, Por qué?
6. ¿De qué forma consideran que los recursos tecnológicos como: software, graficadoras, simuladores, videos, páginas web, etc., mejorarían la comprensión de los contenidos de Mecánica Analítica?
7. ¿Si tuviera recursos didácticos como las maquetas, los usaría para impartir clases?¿Qué beneficios considera que tendría su uso?
8. Sin dejar de lado el libro de la asignatura de Mecánica Analítica, ¿en cuánto cree usted que el material didáctico con su guía docente mejorarían su labor?
9. ¿Recomendaría Ud. la implementación de recursos didácticos para la enseñanza de Mecánica Analítica? ¿Por qué?
10. ¿Qué experiencias han tenido trabajando en grupos, considera que sería aplicable al momento de estudiar Mecánica Analítica? ¿Qué beneficios traería?

UNIVERSIDAD DE CUENCA

ANGEL RIGOBERTO ENRIQUEZ TOCTO <angel.enriquez@ucuenca.edu.ec>

RESOLUCIÓN DE CONSEJO DIRECTIVO DE FECHA 4 DE ENERO DE 2019, SOBRE SOLICITUDES ESTUDIANTILE

1 mensaje

GABRIELA RAQUEL MUNOZ TORRES <gabriela.munozt@ucuenca.edu.ec> 7 de enero de 2019, 11:45
Para: ANGEL RIGOBERTO ENRIQUEZ TOCTO <angel.enriquez@ucuenca.edu.ec>, EULALIA CATALINA FAICAN TIMBI <catalina.faican@ucuenca.edu.ec>, MARIA FERNANDA REYES RIQUETTI <fernanda.reyes@ucuenca.edu.ec>, MELIDA VANESA VELASQUEZ PINOS <vanesa.velasquez@ucuenca.edu.ec>, ELIANA MONSERRATH CUADRADO ORDONEZ <eliana.cuadradoo@ucuenca.edu.ec>, MARIA ALEXANDRA VILLAVICENCIO TORRES <alexandra.villavicencio@ucuenca.edu.ec>, ALEXANDRA DEL ROCIO GUAMBANA ORELLANA <alexandra.guambana@ucuenca.edu.ec>, PATRICIA ROCIO QUEZADA BERMEO <patricia.quezada@ucuenca.edu.ec>

Estimados Docentes, Funcionarios y Estudiantes de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, envío las resoluciones de Consejo Directivo de fecha 4 de Enero de 2019, respecto a las solicitudes estudiantiles:

Solicitud de estudiantes.

a) Aprobación de esquemas de trabajo final de Titulación, (de grado)

El Consejo Directivo de la Facultad, aprueba los siguientes esquemas de trabajo final de titulación, los que constan con su respectivo informe de aprobación de la Junta Académica de Carrera, correspondientes a los de los siguientes estudiantes:

NOMBRE DE ESTUDIANTE	CARRERA	MODALIDAD	TÍTULO DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	DIRECTOR	PLAZO CONCEDIDO
MARIA BELEN BEIJOO ROBLES	COMUNICACIÓN SOCIAL	TRABAJO DE TITULACIÓN	DIAGNÓSTICO DEL PROCESO COMUNICACIÓN DE LA EMPRESA PINFRE Y PROPUESTA DE ESTRATEGIAS PARA MEJORAR EL SERVICIO AL CLIENTE	Mag. Hugo Guillermo Rios	Hasta la terminación de su plan de estudios
JUAN CARLOS GRANDA	CINE Y AUDIOVISUALES	TRABAJO DE TITULACION	ESTUDIO Y GENERACIÓN DE MATÁFORAS VISUALES PARA SU APLICACIÓN AL CORTOMETRAJE	Mg. Ricardo Salcedo	**2 meses es decir Hasta la terminación del presente ciclo académico sept 2018 – feb 2019, fecha desde la cual si así lo requiere podrá solicitar su segunda prórroga con costo.**
CLAUDIO PAUL CHILLOGALLO ESPINOZA Y EDUARDO LUIS DUY PINO	EDUCACIÓN GENERAL BASICA	TRABAJO DE TITULACION	EL MUSEO COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL PROCESO EDUCATIVO	Mag. Raquel Cordero	Hasta la terminación de su plan de estudios
MARCELA CASTILLO	EDUCACIÓN GENERAL	TRABAJO DE	ABUSO SEXUAL EN LA ESCUELA Y	Mag. Elena Jerves	Hasta la terminación

WILLIAM WILFRIDO GORDILLO COLLAHUAZO Y BORIS MARCELO TENEMPAGUAY PAREDES	MATEMÁTICAS Y FISICA	TRABAJO DE TITULACION	ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN	Mag. Fabián Bravo	Hasta la terminación de su plan de estudios
RAFAEL RICARDO AYABACA ALULIMA y ANGEL MOISES PIEDRA ARPI	MATEMÁTICAS Y FISICA	TRABAJO DE TITULACIÓN	GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES LOGARTMICAS Y EXPONENCIALES MEDIANTE EL USO DE MATERIAL CONCRETO	Mag. Eulalia Calle	Hasta la terminación de su plan de estudios
OSCAR FABIAN NIVELO MUICELA y TAMIA PACARI CONTENTO CHALAN	MATEMÁTICAS Y FISICA	TRABAJO DE TITULACIÓN	ENSEÑANZA DE LA MECÁNICA ANALÍTICA CON EL APOYO DE RECURSOS DIDACTICOS	Dr. Santiago Avecillas	Hasta la terminación de su plan de estudios
DIANA FABIOLA DOMUNGUEZ LEMA	MATEMÁTICAS Y FISICA	TRABAJO DE TITULACIÓN	GUÍA DIDÁCTICA Y ELABORACIÓN DE RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PERSPECTIVA CON DOS PUNTOS DE FUGA EN LA ASIGNATURA DE DIBUJO	Mag. Xavier González	Hasta la terminación de su plan de estudios
NELLY MERCEDES MENDEZ CARCHI	HISTORIA Y GEOGRAFÍA	TRABAJO DE TITULACIÓN	EL CAMINO DE ARRIERO SIGSIG-GUALAQUIZA EN EL SIGLO XX	Mag. Miguel Novillo Verdugo	Hasta la terminación de su plan de estudios
ANTONIO ISIDRO JAPON QUIZHPE	HISTORIA Y GEOGRAFÍA	TRABAJO DE TITULACIÓN	EL OFICIO DE LA JOYERIA EN SARAGURO DESDE 1980 AL 2018	Mag. Miguel Novillo Verdugo	Hasta la terminación de su plan de estudios
FRANCISCO ANIBAL FIENCO CUADRADO	HISTORIA Y GEOGRAFÍA	TRABAJO DE TITULACIÓN	HISTORIA DEL OCIO EN LA VIDA COTIDIANA DE LA CUENCA URBANA ENTRE 1950 A 1980	Mag. MIGUEL Novillo Verdugo	Hasta la terminación de su plan de estudios
ANDREA ESTEFANIA ZARI GUAYLLASACA	HISTORIA Y GEOGRAFÍA	TRABAJO DE TITULACIÓN	IMPACTOS SOCIOECONOMICOS, CULTURAL Y DE MOVILIDAD POR EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN E IMPLIEMENTACIÓN DEL TRANVIA EN EL	Mag. María Fernanda Cordero	Hasta la terminación de su plan de estudios